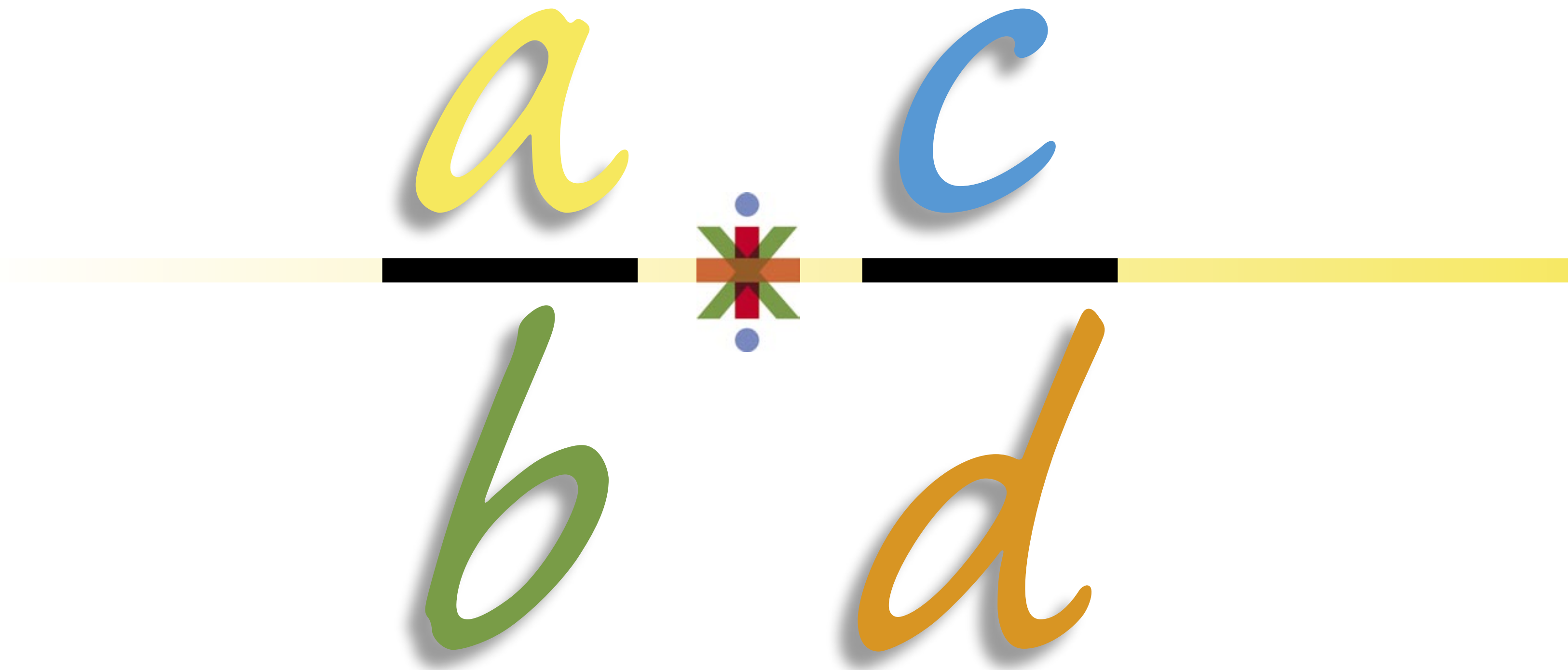
Serie

Desarrollo del pensamiento matemático

Nº 10



Fracciones II

Orden y operaciones

Martín Andonegui Zabala

372.7
And.
Fracciones
Federación Internacional Fe y Alegría, 2006.
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-81-6
Matemáticas, Fracciones.

“Asumir la diversidad en los centros educativos
pasa por reconocer al otro que tengo enfrente,
que es diferente, con capacidades, deseos, inquietudes,
intereses distintos; por tanto, la propuesta educativa
nuestra debe asumir esa diversidad y estar en función
de que cada uno alcance el desarrollo integral
desde la propia identidad”.

Beatriz García

A modo de

Equipo editorial

Beatriz Borjas

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Serie: Fracciones II, número 10
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.

Diseño y diagramación: Juan Bravo
Portada e ilustraciones: Juan Bravo
Corrección de textos: Beatriz Borjas, Carlos Guédez, Margarita Arribas

Edita y distribuye: Federación Internacional Fe y Alegría. Esquina de Luneta, Edif. Centro Valores, piso 7, Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5631776 / 5632048 / 5647423
Fax (58) (212) 5645096
web: www.feyalegria.org

Depósito Legal: lf 603-2006-510-1754
Caracas, mayo 2006

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis
Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)

introducción...

...y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

*Después de gastar **1/5** del sueldo en ropa, **1/4** en comida, **1/3** en alquiler y **1/6** en otros gastos, me quedaron **120** pesos. ¿Cuál es mi sueldo? (*)*

Dada la suma de fracciones $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$, ¿cuáles sumandos deben suprimirse para que la suma de los restantes sea igual a **1**?

*Interpole tres fracciones entre **1/4** y **1/2**.*

En una tienda de ropa, un vestido de señora se vendía por **1.200** pesos. Al cabo de un mes, el vendedor le aplicó un **30%** de descuento; pero como seguía sin venderse, decidió rematarlo con un descuento adicional del **20%** sobre el último precio. ¿Cuál fue el precio definitivo de venta?

*¿Cuál de las siguientes cinco fracciones tiene el mayor valor: **7/8 66/77 555/666 4444/5555 33333/44444**?*

¿Existe alguna fracción entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$?

1. *Indique cuáles de las siguientes expresiones no representan a la fracción **4/3**:*
a) ***1,333**...* **b)** $\frac{1}{3}\times 4$ **c)** $1+\frac{1}{3}$
d) $1\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{2}{3}:2$ **f)** $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}$ **g)** $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}$
h) ***133**%*

2. ¿Cuántos libros hay en una biblioteca, si al intentar sumar **la mitad** más **la tercera** y **la cuarta** parte de los mismos nos excederíamos en **3** del total de los libros?

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las siguientes líneas.

(*) **Aviso a los navegantes:** Las respuestas a los ejercicios precedidos por un número en **negrita** aparecen al final del Cuaderno. Las respuestas a los ejercicios que no se encuentran precedidos por un número son para que las construyas y las valides con tu grupo de trabajo. Para referirnos a las fracciones en su forma numérica habitual, utilizaremos los símbolos 7/8 ó bien $\frac{7}{8}$.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento– y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento de lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...– que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel– ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, el orden de las fracciones y las posibles operaciones entre ellas.

1. Un repaso al Cuaderno nº 9...

En razón de la continuidad temática con el Cuaderno anterior, empezaremos por proponer unos ejercicios como recordatorio de algunas cuestiones útiles para el contenido que se expondrá después.

3. *Escriba las fracciones mixtas correspondientes a las fracciones impropias:* $\frac{7}{5}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{21}{2}$

4. Si el subconjunto de los **3/7** de un conjunto discreto está formado por **21** objetos, ¿cuántos objetos tiene todo el conjunto?

5. *Represente las siguientes fracciones en forma decimal:* $\frac{19}{4}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{27}{22}$

6. Obtenga la fracción generatriz irreducible de las siguientes expresiones decimales: 2,01***18*** 3,75 0,4***8*** 0,***53***

7. *Resuelva los siguientes ejercicios de conversión de fracciones entre los sistemas de representación que se indican:* **a)** ***20/4*** *a decimal* **b)** ***250%*** *a fracción numérica* **c)** ***100%*** *a decimal* **d)** ***20/5*** *a porcentaje* **e)** ***10*** *a porcentaje* **f)** ***3/5*** *a porcentaje*

8. Halle la fracción irreducible en cada caso: $\frac{32}{56}$, $\frac{168}{120}$, $\frac{12}{8}$

9. *Determine si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:*

$\frac{55}{90}$ *y* $\frac{9}{15}$ $\frac{128}{48}$ *y* $\frac{112}{42}$

Calcule mentalmente las expresiones decimales correspondientes a las fracciones siguientes: $\frac{6}{5}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{18}{10}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{0}{5}$

Calcule mentalmente las fracciones numéricas irreducibles correspondientes a las expresiones decimales siguientes: 0,35; 2,2; 1,25; 2,5; 2,8; 0,15

Estime el valor de las siguientes fracciones, aproximándolas a fracciones numéricas más sencillas: $\frac{29}{100}$; 1,48; $\frac{19}{119}$; $\frac{76}{31}$; 0,31

2. El orden de las fracciones

Ordenar fracciones de acuerdo con su valor no es algo complicado. Si éstas vienen dadas en los sistemas de representación decimal, porcentual o punto sobre la recta, el asunto está resuelto: sólo hay que saber ver (puntos sobre la recta) o comparar números enteros (porcentajes) o decimales.

Si las fracciones vienen expresadas en cualquier otro sistema, la manera más sencilla de determinar cuál es la mayor de dos dadas es –como ya lo decíamos en el Cuaderno anterior– traducirlas a su expresión decimal y decidir en consecuencia. De todas formas, vamos a explorar algún otro procedimiento –dentro del propio sistema de representación numérico– para el caso de fracciones expresadas en este sistema.

Si las fracciones poseen el mismo denominador, tampoco hay problema alguno: basta comparar los numeradores y decidir en consecuencia. Así, 6/13 es mayor que 5/13 porque en la primera se consideran más partes congruentes del todo que en la segunda. El problema puede presentarse cuando las fracciones poseen denominadores distintos. Tomemos el ejemplo de las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{11}$. En principio no sabemos "dónde hay más", pero la vía de averiguación luce evidente: llevemos las dos fracciones a un denominador común.

La magia del denominador común

Reducir dos fracciones a un denominador común consiste en hallar un par de fracciones respectivamente equivalentes a cada una de ellas y que posean el mismo denominador. La prioridad está, pues, en la búsqueda de ese denominador. Por lo que dijimos en el Cuaderno anterior acerca de las fracciones equivalentes, ese denominador común debe ser fruto de una amplificación de los dos dados (o, al menos, de uno de ellos), lo que significa que ha de ser múltiplo de ambos. Es decir, común. El primero que satisface la condición de ser múltiplo común es, precisamente, el mínimo múltiplo común. Por consiguiente, el denominador común más pequeño es el *mínimo múltiplo común de los dos denominadores dados*.

Al dividir ese denominador común entre cada uno de los denominadores iniciales logramos descubrir cuál es el *factor de amplificación* que se va a utilizar en cada fracción. Si ahora lo aplicamos a los respectivos numeradores, conseguiremos las dos fracciones equivalentes a las dos iniciales, y con un denominador común.

En el ejemplo anterior ($\frac{3}{11}$ y $\frac{1}{4}$), para buscar las fracciones equivalentes hallamos primero el denominador común: m.m.c.**(11, 4) = 44**. El factor de amplificación para la primera fracción es **44 : 11 = 4**, y para la segunda, **44 : 4 = 11**. Los respectivos numeradores serán: **4 x 3 = 12**, y **11 x 1 = 11**. Las dos fracciones equivalentes son, respectivamente, $\frac{12}{44}$ y $\frac{11}{44}$. Ahora se "ve" que **3/11** es mayor que **1/4**.

No siempre el m.m.c. de los dos denominadores coincide con su producto (ya sabemos que esto sólo ocurre cuando los dos números son primos relativos, como vimos en el Cuaderno nº 8). Por ejemplo, para el caso de $\frac{7}{12}$ y $\frac{15}{28}$, se tiene: **m.m.c.(12, 28) = 84.** El factor de amplificación para la primera fracción es **84 : 12 = 7**, y para la segunda, **84 : 28 = 3**. Los respectivos numeradores serán: **7 x 7 = 49**, y **3 x 15 = 45**. Las dos fracciones equivalentes son, respectivamente, $\frac{49}{84}$ y $\frac{45}{84}$. Y "se ve" que **7/12** es mayor que **15/28**.

También puede darse el caso de que uno de los denominadores sea múltiplo del otro, con lo cual el primero pasa a ser el denominador común. Por ejemplo, para el caso de $\frac{3}{4}$ y $\frac{23}{32}$ se tiene: **m.m.c.(4, 32) = 32**. El factor de amplificación para la primera fracción es **32 : 4 = 8**, y para la segunda, **1**. Los respectivos numeradores serán: **8 x 3 = 24, y 1 x 23 = 23**. Las dos fracciones equivalentes son, respectivamente, $\frac{24}{32}$ y $\frac{23}{32}$. "Se ve" que **3/4** es mayor que **23/32**.

La búsqueda de fracciones equivalentes a dos (o más) dadas es una actividad muy útil para tareas como comparar (la que nos ocupa ahora), sumar o restar fracciones o resolver problemas que impliquen el uso de fracciones (como veremos más adelante); debe, pues, convertirse en algo muy familiar, casi rutinario, pero sin que esto implique perder el sentido de lo que se hace.

Por ello se sugiere utilizar el mecanismo de la búsqueda del m.m.c. de los denominadores dados, y de los respectivos factores de amplificación, y no reglas memorísticas (por ejemplo, "para comparar $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se multiplican $a \times d$ **y** $b \times c$ y se comparan ambos productos: si $a \times d > b \times c$, entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; si $a \times d < b \times c$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; y si $a \times d = b \times c$, entonces $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes"). Reglas como éstas deben aparecer posteriormente, al ser descubiertas y dotadas de significado por los que aprenden una vez que entiendan el porqué de los procedimientos; pero no deben ser enseñadas al comienzo,

ni exclusivamente, sin otra explicación. Esta presentación sólo memorística y formulista no lleva al encuentro con la verdadera matemática...

Una última consideración acerca de la razón por la que se sugiere acudir siempre al mecanismo de la búsqueda del m.m.c. de los denominadores, y no conformarse con (y tener que "cargar") múltiplos mayores: por economía. Por ejemplo, cuando se trata de mangos y de naranjas, el denominador común inmediato es "frutas"; otro denominador más "amplio", que incluye al anterior, sería "productos vegetales"; y otro, todavía más amplio, sería "objetos de la naturaleza". Si no hay requerimientos agregados, es suficiente y más preciso el denominador frutas.

Lo mismo ocurre con el denominador obtenido por la vía del m.m.c. de los denominadores dados: es más preciso y suficiente. Si se utilizan denominadores más "amplios" (múltiplos del m.m.c.), llegaremos a fracciones equivalentes más abultadas, más "molestas" para manejar...

Por ejemplo, en el caso de $\frac{3}{4}$ y $\frac{23}{32}$, si se toma por denominador común el producto **4 x 32 = 128**, el factor de amplificación para la primera fracción sería **128 : 4 = 32**, y para la segunda, **128 : 32 = 4**. Los respectivos numeradores serían: **32 x 3 = 96**, y **4 x 23 = 92**. Las dos fracciones equivalentes serían, respectivamente, $\frac{96}{128}$ y $\frac{92}{128}$. Se sigue viendo que **3/4** es mayor que **23/32**, pero los cálculos han sido algo más engorrosos y las fracciones finales más abultadas. Imaginemos si se tratara de denominadores aún mayores...

Y ya que hablamos de economía, tampoco está de sobra advertir que si las fracciones que se desea ordenar no vienen en formato irreducible, conviene llevarlas a tal formato. Así, por ejemplo, para comparar $\frac{16}{20}$ y $\frac{27}{36}$, lo primero que hacemos es observar que ambas son reducibles, simplificables: la primera se reduce a **4/5**, y la segunda a **3/4**. Ahora sí se puede buscar el denominador común, que será **20** (y no **180**, como se hubiera obtenido al calcular **m.m.c.(20, 36)**...), y continuar. Sin olvidar nunca que disponemos del recurso de comparación de los decimales correspondientes, que en este caso nos dice que **27/36** (**3/4 = 0,75**) es menor que **16/20** (**4/5 = 0,8**).

Justifique la regla mencionada anteriormente: "Para comparar $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se multiplican ***a x d*** *y* ***b x c*** *y se comparan ambos productos: si* ***a x d > b x c****, entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; si* ***a x d < b x c****, entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; y si* ***a x d = b x c****, entonces $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes". Ayúdese con el recurso de reducir las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ al denominador común* ***b x d****.*

10. En cada par de fracciones decida cuál es la mayor: $\frac{13}{20}$ y $\frac{2}{3}$; $\frac{21}{8}$ y $\frac{26}{10}$; 0,45 y $\frac{5}{11}$. Utilice el procedimiento que desee.

¿Cuál de las siguientes fracciones tiene mayor valor: $\frac{7}{8}, \frac{66}{77}, \frac{555}{666}, \frac{4444}{5555}, \frac{33333}{44444}$?

Este es un caso típico en el que, antes de proceder, hay que llevar todas las fracciones a irreducibles. Así transformadas, las fracciones son, respectivamente: $\frac{7}{8}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}$ y $\frac{3}{4}$. El recurso a los decimales nos permite asegurar que la fracción mayor es **7/8**.

Ordene de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{1}{3}$; 0,31; $\frac{14}{45}$; $\frac{31}{99}$ y $\frac{3}{10}$

La presencia de tantas fracciones y de algunos denominadores tan altos, nos sugiere la utilización de las expresiones decimales para todas las fracciones, antes que la búsqueda de un denominador común. Estas expresiones decimales son: **1/3 = 0,*3***; **0,31**; **14/45 = 0,3*1***; **31/99 = 0,*31***; **3/10 = 0,3**. Y ordenadas de menor a mayor: **3/10** < **0,31** < **14/45** < **31/99** < **1/3**.

Quizá la resolución del último ejercicio nos está llevando a preguntarnos si las fracciones pueden estar tan "pegadas" unas de otras como uno pudiera imaginar; en otras palabras, que si doy dos fracciones muy próximas, siempre puedo ubicar otra en medio de ambas. Esto es lo que planteaba uno de los ejercicios propuestos al comienzo:

¿Existe alguna fracción entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$?

Aparentemente, pareciera que no. Pero ya sabemos que tenemos el recurso de los otros sistemas de representación para ver más allá de las limitaciones de cada sistema en particular. Así, llevadas a su expresión decimal, estamos preguntando si existe alguna fracción entre **0,7** y **0,*8***. Y vemos que hay… infinitas. Por ejemplo: **0,78**; **0,7*8***; **0,79**; **0,791**; **0,8**; **0,8*3***; **0,85**; etc. Y si lo deseamos, podemos expresarlas también en la forma numérica; así, por ejemplo, las tres últimas: $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{17}{20}$.
Otra forma de visualizarlo es amplificando ambas fracciones; por ejemplo, llegando a $\frac{14}{18}$ y $\frac{16}{18}$, lo que nos permite ubicar en medio la fracción $\frac{15}{18}$ (justamente $\frac{5}{6}$). Pero si el factor de amplificación hubiera sido **5** ($\frac{35}{45}$ y $\frac{40}{45}$), contaríamos a la vista con **4** fracciones intermedias: $\frac{36}{45}$ (justamente $\frac{4}{5}$), $\frac{37}{45}$, $\frac{38}{45}$ y $\frac{39}{45}$. Es otra manera de ver que existen infinitas fracciones intermedias.

El hecho de que siempre existan infinitas fracciones entre dos dadas, por muy próximas que parezcan –es decir, que no haya "huecos" entre cualquier par de fracciones–, es una propiedad que recibe el nombre de densidad del conjunto de las fracciones. Esto, evidentemente, no existía en el conjunto de los números naturales.

A veces se desea introducir un número determinado de fracciones entre dos dadas, pero, además, que queden a "distancias" iguales unas de otras. Esta actividad recibe el nombre de interpolación de fracciones. En el último ejercicio hemos visto la forma de resolver este problema si las dos fracciones extremas se presentan con el mismo denominador. Vamos a uno de los casos propuestos al comienzo del Cuaderno:

Interpole tres fracciones entre 1/4 y 1/2.

Primero, trataremos de llevar las dos fracciones a expresiones equivalentes con un denominador común. Aquí la tarea es sencilla: **1/4** y **2/4**. Como nos solicitan interpolar tres fracciones, utilizaremos **4** como factor de amplificación de ambas fracciones, que pasan a ser: $\frac{4}{16}$ y $\frac{8}{16}$. Las fracciones a interpolar son, pues: $\frac{5}{16}, \frac{6}{16}$, (ó $\frac{3}{8}$) y $\frac{7}{16}$.

Para culminar esta parte, vamos a dejar establecido que *entre dos fracciones cualesquiera siempre existe una relación de orden: cualquiera de ellas siempre es menor, igual o mayor que la otra*.

3. La suma de fracciones

De entrada digamos que como la fracción se presenta como "*número* que mide el número de veces que la parte está contenida en el todo, considerado éste como la unidad", resulta bastante espontáneo establecer una aritmética de las fracciones, es decir, considerar las operaciones aritméticas aplicadas a las fracciones. En este sentido y como en el caso de los números naturales, antes de establecer los procedimientos o algoritmos operativos necesitaremos dotar de sentido a cada operación.

3.1. ¿Qué significa sumar fracciones?

¿Qué significa una expresión como $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$? Evidentemente, no podemos hablar del "cardinal del conjunto unión..." tal como lo hacíamos para la adición de números naturales en el Cuaderno nº 3. Pero sí podemos recoger el sentido de la suma "como un modelo de *situaciones* de la vida diaria, o de situaciones lúdicas, o de otras áreas del saber:

1. Situaciones de *agrupar*, reunir, juntar... lo que aportan varios simultáneamente.

2. Situaciones de *agregar*, añadir... algo a lo que ya existe.

Estas situaciones suelen venir caracterizadas –en la interpretación verbal que de ellas hace el sujeto– por verbos tales como recibir, agregar, ganar, reunir, adquirir, obtener, acumular, guardar... y otros similares. En estas circunstancias, la operación aritmética de la adición nos ayuda a llegar al resultado de calcular el total de las cantidades recibidas, agregadas, ganadas, reunidas, etc."

Hasta aquí un extracto de lo expresado en el Cuaderno nº 3; todo ello es válido también en el caso de las fracciones, con la salvedad de que lo que ahora se agrega o reúne son partes de un todo. Así, $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$ es la operación que sirve de modelo para una situación en la que, por ejemplo, estamos reuniendo 2/3 de una pieza de tela con 1/5 de la misma pieza (u otra similar), y deseamos tener una "medida" del total reunido, medida expresada también en términos de fracción de la pieza completa de tela.

3.2. Sumar fracciones en siete sistemas de representación...

De nuevo la diversidad. Es decir, la posibilidad de efectuar la operación en cualquier sistema y, en particular, en el que resulte más cómodo en cada caso. Pero primero veamos cómo se suma al interior de cada sistema de representación.

a) Decimal: Simplemente se suman las cantidades decimales. Es un método muy sencillo y directo para el caso de expresiones decimales exactas; por ejemplo, 0,5 + 0,208 + 1,25 = 1,958. En el caso de expresiones periódicas, hay que sumar con más cuidado, porque el resultado será probablemente otra expresión decimal periódica.

Por ejemplo: 0,***3*** + 0,8***3*** = 0,3333... + 0,8333... = 1,1666... = 1,1***6***. Es decir, se trata de extender suficientemente los decimales de los períodos, sumar, y tratar de ver qué nueva fracción periódica se genera. Así: 0,1***27*** + 2,15***34*** = 0,1272727... + 2,153434...= 2,280707... = 2,28***07***. Pero si se encuentran dificultades para ello, es preferible pasar los sumandos a la forma numérica y proceder como se dirá luego.

b) Porcentual: Se suman los porcentajes. Por ejemplo, 40% + 35% = 75%.

c) Punto sobre la recta: Se toman los segmentos que van del origen a cada uno de los puntos señalados, se concatenan sobre la recta a partir del origen y se marca el punto extremo del segmento suma. No es recomendable trabajar en este sistema por el riesgo de imprecisión al manejar los segmentos (al medirlos y transportarlos).

Obsérvese que en los tres sistemas anteriores la suma es directa, ya que en ellos no existe la equivalencia interna de fracciones y, por consiguiente, los sumandos no admiten transformaciones.

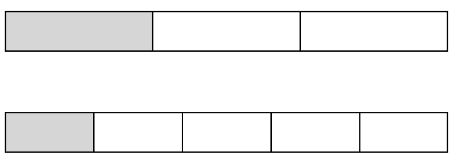
d) Numérico (y verbal asociado): Este es el caso que habitualmente (y casi siempre, únicamente) se presenta en los textos. Vamos a trabajarlo con más detalle. En primer lugar –y puesto que ahora aparecen denominadores–, recordemos lo expresado para tal situación al hablar de la suma de números naturales (Cuaderno nº 3): puedo sumar **3 piñas** con **5 piñas** para tener **8 piñas**, porque ambos sumandos poseen el mismo denominador. Pero si quiero sumar **3 piñas** con **5 naranjas**, no puedo llegar a un resultado único a no ser que halle un denominador común para ambos sumandos, que puede ser frutas: tengo, en total, **8 frutas**.

Así, la suma $\frac{5}{17}+\frac{15}{17}$ da como resultado **20/17**, ya que estoy agrupando **5 diecisieteavos** (porciones obtenidas al dividir un todo en **17** partes congruentes) con otros **15** diecisieteavos, lo que me produce un total de **20** de éstos. Pero para el caso de la suma $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$, primero debo *reducir ambas fracciones a un denominador común* –tal como se hizo antes– *y luego proceder a sumar los numeradores*: $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{5}{10}+\frac{6}{10}=\frac{11}{10}$. Análogamente, $\frac{16}{20}+\frac{27}{36}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{16}{20}+\frac{15}{20}=\frac{31}{20}$ ($1\frac{11}{20}$, como fracción mixta).

Buscar el denominador común de dos fracciones para proceder a su suma no es, pues, solamente una técnica o método para sumar, sino prioritariamente una necesidad teórica: si no existe un denominador común, la suma no es posible en el sistema numérico de representación de las fracciones.

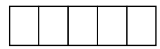
e) Gráfico continuo: En este sistema también hay que contar con un mismo tipo de división del todo (un mismo número de partes congruentes) en cada una de las fracciones. Si éstas no lo tienen inicialmente, hay que pasar a expresiones gráficas equivalentes.

Por ejemplo, para sumar $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, la situación gráfica sería:

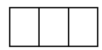


El problema consiste en encontrar una cuadrícula de tamaño menor a las correspondientes a **1/3** y **1/5**, que encaje un número de veces exacto en **1/3** y otro número de veces exacto en **1/5**. Esto se consigue si la cuadrícula **1/3** se divide en **5** partes congruentes y la cuadrícula **1/5** en **3** partes congruentes: en ambos casos se conseguirá una cuadrícula del tamaño **1/15** del todo:

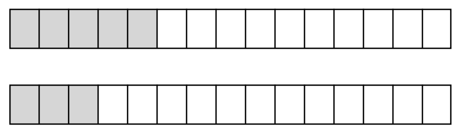
1/3 dividido en **5** partes congruentes:



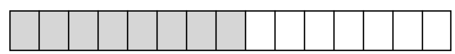
1/5 dividido en **3** partes congruentes:



Y como puede observarse, las cuadrículas de tamaño menor coinciden en ambos casos y representan **1/15** de la figura total. Ahora los sumandos se transforman en:



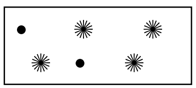
Y la suma, agrupada sobre el gráfico de una sola unidad, es **8/15**:

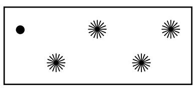


Como puede observarse, el procedimiento "dibuja" lo que hacemos cuando sumamos en el sistema numérico ***a/b*** y tiene esa virtud visualizadora. Pero

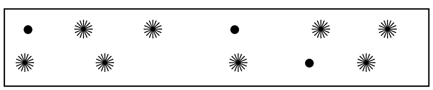
–una vez asimilado el procedimiento y su significado– también se pueden pasar las fracciones gráficas a la forma ***a*/*b***, sumar en este sistema y devolver la respuesta en forma gráfica, si así nos interesa.

f) Gráfico discreto: Este sistema no se presta con tanta claridad para representar la suma de fracciones y puede conducir a resultados erróneos. En efecto, en la suma $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, los sumandos (el número de • respecto al total de objetos) vendrían representados, por ejemplo y respectivamente, por:





Al efectuar la suma –entendida como agrupación– uno tendería a reunir todos los objetos en un solo conjunto:



lo que ofrecería la visualización engañosa de la fracción **3/11** como resultado de la "suma". Obsérvese además, que si para designar **1/3** hubiéramos dibujado un • y dos ✳, tendríamos en la agrupación final la fracción correspondiente a **2/8**, de modo que la suma dependería de las diversas representaciones de cada sumando, con lo que no se garantizaría un único resultado final.

Esta ambigüedad de la suma en el sistema de representación gráfico discreto se debe al manejo de cantidades discretas, las cuales "arrastran" hacia la aplicación de la suma de números naturales, perdiéndose de vista la situación de fracciones. Por eso es preferible, si los sumandos se presentan en este sistema, pasarlos al sistema numérico, sumarlos dentro de éste y, si así se requiere, pasar la respuesta de nuevo al sistema gráfico discreto.

En resumen, vemos cómo se suma en cinco de los siete sistemas de representación (excluimos el verbal, por su dependencia inmediata del numérico, y el gráfico discreto por su ambigüedad). El de uso más sencillo, aunque limitado en su aplicación, es el porcentual. Entre los cuatro restantes –aplicables a cualquier tipo de fracciones–, el de acceso más rápido a la respuesta es el decimal; y el que más se ha promocionado tradicionalmente, el numérico. En el caso de los dos sistemas restantes (gráfico continuo y punto sobre la recta), es preferible llevarlos a la forma numérica y proceder a sumar en ella.

11. *Efectúe las siguientes sumas de fracciones (hágalo como lo desee):*
a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ **b)** *1,5 + 2,***3** **c)** $\frac{5}{3}+\frac{16}{9}$
d) $\frac{3}{7}$ + *0,0***8** **e)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$
f) $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{20}$

Y ahora veamos algunas situaciones particulares:

La suma de un entero más una fracción puede facilitarse si nos familiarizamos con las diversas formas que pueden adoptar los enteros como fracciones cuyo numerador es múltiplo del denominador. Así, $1+\frac{5}{12}$ puede pasarse inmediatamente a $\frac{12}{12}+\frac{5}{12}$, es decir, $\frac{17}{12}$. Análogamente, $5+\frac{4}{7}=\frac{35}{7}+\frac{4}{7}=\frac{39}{7}$.

Las fracciones mixtas pueden verse como la suma de la parte entera y de la fracción propia. Así, $3\,\frac{2}{5}$ equivale a $3+\frac{2}{5}$ ó a $\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$. Esta es la manera de pasar de una fracción mixta a una impropia.

Efectúe la suma: $\frac{13}{5}+\frac{23}{6}$

En el sistema numérico se tiene: denominador común = **m.m.c.(5, 6) = 30**. El factor de amplificación para la primera fracción es **6**, y para la segunda, **5**. Los respectivos numeradores serán: **6 x 13 = 78, y 5 x 23 = 115**. Las dos fracciones equivalentes son, respectivamente, **78/30** y **115/30**. Así: $\frac{13}{5}+\frac{23}{6}=\frac{78}{30}+\frac{115}{30}=\frac{193}{30}$. Si hubiéramos llevado las fracciones a la forma decimal, tendríamos: **13/5 = 2,6 y 23/6 = 3,8*3***, cuya suma es **6,4*3***. La expresión numérica de **6,4*3*** es: $\frac{643-64}{90}=\frac{579}{90}=\frac{193}{30}$.

Pero hay todavía otra forma de efectuar la suma, llevando los sumandos a la forma de fracción mixta: $2\frac{3}{5} + 3\frac{5}{6} = 2 + \frac{3}{5} + 3 + \frac{5}{6} = 5 + \frac{3}{5} + \frac{5}{6}$. Ahora se trata de sumar estas dos fracciones ($\frac{3}{5} + \frac{5}{6} = \frac{18}{30} + \frac{25}{30} = \frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30}$) y agregar **5** unidades. El resultado final es $6 + \frac{13}{30} = \frac{180}{30} + \frac{13}{30} = \frac{193}{30}$. Como vemos, se presentan tres formas de efectuar la suma: ¿cuál considera como la mejor para usted?

Es importante familiarizarse con los resultados de las sumas de las fracciones más habituales. Por ejemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ó $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, resultados a los que se puede llegar mediante un cálculo mental, bien sea manejando los decimales asociados o buscando el denominador común. Así, para el segundo ejemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,5 + 0,25 + 0,125 = 0,875 = 7/8$; o también: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. El ejercicio de este cálculo mental con fracciones debe ser uno de nuestros objetivos de aprendizaje y debe ponerse en práctica en lo posible.

Realice mentalmente las sumas de las siguientes fracciones:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{3}{20}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$; $\frac{1}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{20}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$; $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$; $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

¿Cuál es el resultado de la suma 0,*3* + 0,*6*?

Sumadas como expresiones decimales, el resultado es: **0,*3* + 0,*6* = 0,333… + 0,666… = 0,999… = 0,*9***. Ahora bien, si al inicio hubiéramos pasado a la forma numérica (**0,*3* = 3/9 = 1/3** y **0,*6* = 6/9 = 2/3**) tendríamos: **0,*3* + 0,*6*** $= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Ambas respuestas (**0,*9*** y **1**) son válidas pues, como vimos en el Cuaderno anterior, representan el mismo valor: la unidad.

Llegue al mismo resultado del ejercicio anterior sumando 3/11 y 8/11 como fracciones numéricas y como fracciones decimales. Y análogamente, con 2/7 y 5/7.

3.3. ¿Y la regla para sumar fracciones?

Algún(a) lector(a) debe estar pensando que se nos está olvidando lo más "importante", lo que no debe faltar: el algoritmo para sumar fracciones, el que aparece en todos los libros, el que aprendimos desde siempre: *Para sumar* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ *se busca como denominador común el m.m.c.(*b, d*); se divide este número entre* b *y el resultado se multiplica por* a*; se divide después entre* d *y el resultado se multiplica por* c*; se suman los dos productos anteriores. Así,* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ *es una fracción que tiene como numerador la última suma y como denominador, el denominador común hallado.*

Como hemos dicho en otras oportunidades, esta regla (o alguna otra similar, como aquella de "se multiplica en cruz, etc.") no debe darse inicialmente, y menos sin explicación alguna. Lo ideal es proceder como lo hemos hecho aquí, ofreciendo las alternativas de los sistemas de representación y, en el caso del sistema numérico, justificando la absoluta necesidad de sumar fracciones con igual denominador. La regla, en todo caso, debe ser descubierta después por los mismos aprendices, expresada con sus propias palabras y dotada de significado por ellos mismos. Sólo así se justifica su formulación y su uso.

A partir de los contenidos desarrollados hasta ahora, justifique todas las "reglas para sumar fracciones" que pueda encontrar en diversos libros de texto. Formule ahora, además, una regla para el caso de la suma de tres o más fracciones y justifíquela.

3.4. Las propiedades de la suma de fracciones

Son similares a las que posee la suma de números naturales (ver Cuaderno nº 3), sólo que los sumandos son ahora fracciones:

a) *Conmutativa:* El orden en que se consideran dos sumandos no modifica su suma.

b) *Asociativa:* Si hay más de dos sumandos, el orden progresivo en que "entran" en la suma es indiferente: el resultado siempre es el mismo.

c) *Existencia de elemento neutro:* Es decir, la fracción **0**; cuando se suma a una fracción, ésta no varía.

Y es válido el comentario que hacíamos entonces: "Las propiedades de la suma no son simplemente para aprenderlas –porque forman parte de lo que hay que saber–, sino sobre todo para utilizarlas. Porque las propiedades están ahí para *facilitarnos la operación de la suma*, para darnos mayor libertad a la hora de sumar" (Cuaderno nº 3).

Dada la suma de fracciones** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$, **¿cuáles sumandos deben suprimirse para que la suma de los restantes sea igual a 1?

Vamos a apoyarnos en las facilidades que nos dan las propiedades conmutativa y asociativa –en cuanto que podemos sumar en el orden que mejor nos convenga– y en la familiaridad con las fracciones. Así, sumando **1/2 + 1/4** llegamos a **3/4**. Nos falta **1/4** para completar la unidad. Pero $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$ no da ese valor. En cambio, $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ es igual a $\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$. Por consiguiente, deben suprimirse $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{10}$.

De más está decir que todo este proceso es fruto de la observación y del ensayo... Evidentemente, siempre queda el recurso de efectuar la suma buscando un denominador común y decidiendo después los sumandos que deben eliminarse. Pero también vemos cómo la intuición, el ensayo y la familiaridad con las fracciones y el cálculo mental, resultan exitosos... y económicos.

12. Si $\frac{m}{n}+\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, ¿cuánto vale m? ¿Y n?

13. *Utilice su capacidad de observación y las propiedades de la suma de fracciones para calcular mentalmente el valor de:* $\frac{1}{3}+\frac{4}{10}+\frac{1}{5}+\frac{2}{8}+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

4. La sustracción de fracciones

Al igual que la suma, la sustracción también puede ser vista "como un *modelo de situaciones* de la vida diaria, o de situaciones lúdicas, o de otras áreas del saber:

1. Situaciones de *quitar de* una cantidad dada y ver cuánto queda.
2. Situaciones de averiguar cuánto *falta para* llegar a determinada cantidad.
3. Situaciones de *comparar* dos cantidades, en el sentido de calcular cuánto tiene una de más o de menos con respecto a la otra.

Estas situaciones suelen venir caracterizadas –en la interpretación verbal que de ellas hace el sujeto– por verbos tales como quitar, sacar, reducir, eliminar, quedar, sustraer, perder, pagar, regalar, faltar, exceder... y otros similares. En estas circunstancias, la operación aritmética de la sustracción nos ayuda a llegar al resultado de calcular lo que queda después de quitar, lo que falta para llegar al total, en cuánto una cantidad excede a otra, etc.".

Hasta aquí la cita del Cuaderno nº 4, cita cuyo contenido sigue siendo válido, con la salvedad de que lo que ahora se quita o compara son partes de un todo. Así, $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}$ es la operación que sirve de modelo para una situación en la que, por ejemplo, tenemos **2/3** de una pieza de tela y estamos cortando de ese retal el equivalente a **1/5** de la pieza total, y deseamos tener una "medida" de la parte restante en forma de fracción. O para la situación en la que disponemos de dos retales, cuyas magnitudes son **2/3** y **1/5** de una pieza de tela, y queremos saber cuánta tela de más –medida en términos de “parte del todo”– tiene el primer retal respecto al segundo. Lo que sí debe tomarse en cuenta es que, de manera análoga al caso de los números naturales, *la fracción que actúe como minuendo no puede ser menor que la que se considere como sustraendo*.

La resta de fracciones puede operarse también en cualquiera de los sistemas de representación, con las mismas consideraciones que hacíamos al referirnos a la suma de fracciones. Para consolidar nuestros conocimientos, tratemos de resolver estos ejercicios:

14. *Efectúe las siguientes restas de fracciones (hágalo como lo desee):*
a) $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{7}{6}-\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{16}{9}-\frac{5}{3}$
d) 2,***3*** – 1,***45*** **e)** $\frac{27}{4}-\frac{13}{2}$ **f)** $\frac{6}{10}-\frac{9}{15}$

Como en el caso de la suma, la resta de un entero menos una fracción (y viceversa) puede facilitarse si nos familiarizamos con las diversas formas que pueden adoptar los enteros como fracciones cuyo numerador es múltiplo del denominador. Así, $1-\frac{5}{12}$ puede pasarse inmediatamente a $\frac{12}{12}-\frac{5}{12}$, es decir, 7/12. Análogamente, $5-\frac{4}{7}=\frac{35}{7}-\frac{4}{7}=\frac{31}{7}$. O bien, $\frac{23}{8}-2=\frac{23}{8}-\frac{16}{8}=\frac{7}{8}$. A este respecto, conviene también habituarse a ver las fracciones como próximas a números enteros. Así, por ejemplo, 3/4 = 1 – 1/4; $\frac{7}{9}=1-\frac{2}{9}$; $\frac{15}{8}=2-\frac{1}{8}$, etc.

Efectúe la resta $3\frac{2}{5}-2\frac{5}{6}$

Como ya sabemos, las fracciones mixtas implican una suma de un entero y una fracción propia: $3\frac{2}{5}=3+\frac{2}{5}$, y $2\frac{5}{6}=2+\frac{5}{6}$. Alguien pudiera pensar que la operación solicitada se resuelve restando las partes enteras entre sí, e igualmente las fracciones propias. Esta vía es válida cuando esta última resta (la de las fracciones propias) queda definida, cosa que no ocurre ahora: no podemos restar $\frac{2}{5}-\frac{5}{6}$, ya que $\frac{2}{5}<\frac{5}{6}$.
Una de las salidas sería pasar ambas fracciones a su forma impropia ($3\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$ y $2\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$) y restar $\frac{17}{5}-\frac{17}{6}$. Otra vía puede ser llevar ambas fracciones a decimales (**17/5 = 3,4 y 17/6 = 2,8*3***) y restar **3,4 – 2,8*3***. Finalmente, otro camino puede consistir en que, en la fracción $3\frac{2}{5}$, el entero ceda una unidad (en forma de **5/5**) a **2/5** y la fracción $3\frac{2}{5}$ se convierta en $2\frac{7}{5}$; ahora sería posible restar $2\frac{7}{5}-2\frac{5}{6}$: la diferencia de los enteros es **0**, y toda la resta queda reducida a $\frac{7}{5}-\frac{5}{6}=\frac{42}{30}-\frac{25}{30}=\frac{17}{30}$. ¿Cuál de las tres vías le parece más sencilla para su uso?

Efectúe mentalmente las siguientes restas de fracciones:
$\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$; $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$; $\frac{9}{8}-\frac{3}{4}$; $\frac{11}{12}-\frac{2}{3}$;
$5\frac{3}{5}-3\frac{1}{10}$

15. En una casa de tres pisos, los dos primeros juntos miden $5\frac{1}{8}$m de altura. Si la altura total de la casa es de $7\frac{3}{4}$m, ¿cuál es la altura del tercer piso?

16. *¿Cuál es la diferencia, expresada en kg, entre **3/4** y **4/5** de una tonelada métrica?*

17. Diana tiene **17 1/4** años de edad. ¿Cuántos años tiene su hermana, si es **2 3/4** años más joven que Diana?

18. *¿Qué fracción debe añadirse a **5/6** para llegar a **15/16**? ¿Será **10/10**?*

5. La multiplicación de fracciones

¿Qué puede significar ahora una expresión como $\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$? Evidentemente, no podemos hablar del “cardinal del conjunto producto cartesiano de dos conjuntos...” tal como lo hacíamos para la multiplicación de números naturales en el Cuaderno nº 5. En realidad, son pocas las cosas del ámbito de la multiplicación de esos números que podemos mantener ahora. Quizá, la referencia a la idea de que multiplicar es “reiterar una cantidad un determinado número de veces", pero con ciertas limitaciones, como veremos.

Otra de las restricciones que impone este tema es la de los sistemas de representación en los que cabe efectuar la multiplicación de fracciones. Una revisión reduce tales sistemas al decimal, al numérico y al gráfico continuo. No hay dificultades para la multiplicación de expresiones decimales exactas (sí para las periódicas...), así que nos centraremos en el sistema numérico, sistema en el que habitualmente –por no decir casi exclusivamente– suele presentarse esta operación. También nos referiremos al gráfico continuo, como oportunidad de visualizar lo que ocurre en el sistema numérico.

5.1. La multiplicación de enteros por fracciones y viceversa

¿Qué significado puede tener una operación como $\frac{2}{5}$ x $\frac{1}{3}$? Para tratar de llegar al mismo, veamos primero esta breve secuencia:

La multiplicación **5 x 3** puede entenderse como "**5** veces **3**"

La multiplicación **5 x** $\frac{3}{4}$ puede entenderse como "**5** veces **3/4**"

Esta última pudiera representar la situación de calcular cuántas horas semanales de una determinada materia se han dado en clase (cinco días), a razón de **3/4** de hora diarios (Llinares y Sánchez, 1988). Su resolución lleva –según estos autores– a la suma **3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4** = $\frac{3+3+3+3+3}{4} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4}$, que equivale a haber multiplicado **5 x 3** para llegar al numerador de la nueva fracción, en la que el denominador se mantiene. Esto significa que puede entenderse directamente la multiplicación como "**5** veces **3 cuartos**", al modo de "**5** veces **3** sillas", lo que nos lleva a "**15 cuartos**": simplemente "debe" multiplicarse el factor **5** por el numerador **3** y dejar intacto el sustantivo-denominador.

En esta interpretación de la multiplicación el **5** actúa como un *operador*, es decir, como la cantidad que "opera" (trabaja, procede, funciona) multiplicativamente con el numerador de la fracción. Esta forma de ver las cosas ratifica nuestra percepción anterior de las fracciones que no son unitarias como "múltiplos" de las fracciones unitarias: **7/8** como "**7** veces **1 octavo**" (**7 x 1/8**). Percepción que puede extenderse a otros casos como, por ejemplo, ver en $\frac{8}{15}$ "**4** veces $\frac{2}{15}$" (**4 x** $\frac{2}{15}$) ó "**2** veces $\frac{4}{15}$" (**2 x** $\frac{4}{15}$)... Veamos ahora la siguiente secuencia de significados de multiplicaciones:

3 x 6 puede entenderse como "el **triple** de **6**", que es **18**

2 x 7 puede entenderse como "el **doble** de **7**", que es **14**

1/2 x 5 puede entenderse como "la **mitad** de **5**", que es **5/2**

$\frac{1}{3}$ **x 12** puede entenderse como "el **tercio** (la tercera parte) de **12**", que es **4**

$\frac{2}{3}$ **x 12** puede entenderse como "el **doble** de $\frac{1}{3}$ de **12**", es decir, "el **doble** de **4**", que es **8**

Lo que nos interesa recalcar por ahora es que –como en el caso de los enteros– también *las fracciones pueden actuar como operadores (operadores que fraccionan, que "introducen" la fracción al otro factor*...), y que *éste es el sentido de una fracción **a/b** como factor en una multiplicación por un entero*. Es decir, que el factor entero considerado como un todo se divide en ***b*** partes, de las que se van a considerar ***a*** de ellas. Así, por ejemplo, en el caso $\frac{2}{3}$ **x 12**, el conjunto de **12** objetos se divide en **tres** partes, cada una de las cuales contiene **4** objetos, y se consideran **dos** de esas partes, con **8** objetos en total.

Por otro lado, tanto en la situación de entero por fracción ($n \times \frac{a}{b}$) como en la de fracción por entero ($\frac{a}{b} \times n$), el resultado es el mismo, es decir, *una fracción que tiene como numerador el producto del entero por el numerador de la fracción factor, y como denominador, el denominador de la fracción factor:* $\frac{n \times a}{b}$.

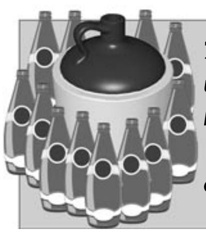
¿Cuántas horas son los 5/6 de un día?

La lógica de resolución del problema sugiere considerar las **24** horas del día como un todo, que es "operado" por el factor **5/6**; es decir, las **24** horas se dividen en **6** lotes de **4** horas cada uno, de los que se consideran **5**; lo que nos da un total de **20** horas. Este resultado se obtiene directamente por la multiplicación $\frac{5}{6} \times 24 = \frac{5 \times 24}{6} = 20$ horas. Queremos insistir en la importancia de habituarnos a considerar la multiplicación de una fracción por un entero como el modelo de operación que responde directamente a situaciones similares a la dada.

*Llevo recorridos **2/3** de un trayecto que tiene **72** km de longitud. ¿Cuánto me falta para llegar?*

Puedo aplicar el operador $\frac{2}{3}$ a **72** km para saber lo que llevo recorrido ($\frac{2}{3} \times 72 = \frac{2 \times 72}{3} = 48$ km) y luego efectuar la resta **72 – 48 = 24** km. Pero también puedo aplicar directamente el operador **1/3** (lo que falta es $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$) a **72**: $\frac{1}{3} \times 72 = \frac{72}{3} = 24$ km.

19. ¿Cuánto es el doble de **1/2**, más la mitad de **1/2**?



20. *¿Cuántos litros tiene un recipiente que se ha llenado con los **5/6** de **12** botellas de **1/2** litro cada una?*

5.2. La multiplicación de dos fracciones

Entremos ahora a la multiplicación genérica de dos fracciones. ¿Cuál es el sentido de una expresión como $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$?

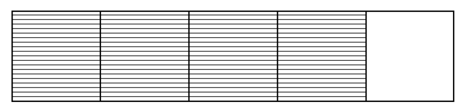
Veamos tres posibles versiones de esta operación.

a) *La primera fracción actúa como operador de la segunda*. Así, podemos leer esa multiplicación como "los **dos quintos** de **un tercio**". Considerando **2/5** (**2 x 1/5**) como el doble de **1/5**, podemos entender "los **2 quintos** de **1 tercio**" como **el doble** de "**1 quinto** de **1 tercio**". Ahora bien, "**1 quinto** de **1 tercio**" significa que la **tercera parte** de un todo se fracciona a su vez en **5** partes, con lo que cada una de estas nuevas fracciones unitarias representa **1/15** del todo inicial. Es decir, considerar "**1 quinto** de **1 tercio**" equivale a considerar de una sola vez "**1 quinceavo**" del todo. En otras palabras: $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$. Y por lo tanto, $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ será el doble de lo anterior: $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$.

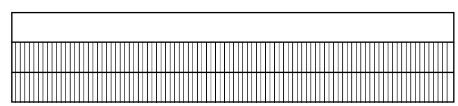
Las mismas consideraciones pueden hacerse para la multiplicación $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$. Lo que cabe destacar es que en ambas multiplicaciones ($\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$) se obtiene el mismo resultado: **2/15**; es decir, *una fracción que tiene como numerador el producto de ambos numeradores, y como denominador el producto de ambos denominadores*.

b) *Las dos fracciones representan las longitudes de los lados de un rectángulo, y su producto, el área de dicho rectángulo*. Por ejemplo, al multiplicar $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ podemos pensar en un rectángulo que tenga tales factores como medida de sus lados; si suponemos que **4/5** se refiere a la base y **2/3** a la altura, su respectiva representación sería:

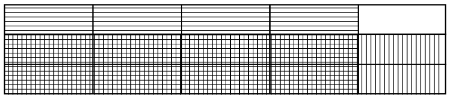
Base: **4/5**



Altura: **2/3**

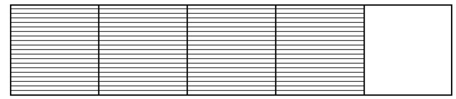


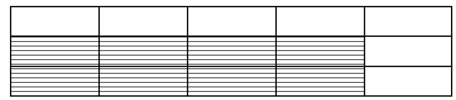
Y la de su producto, la del área con rayado intersectado:

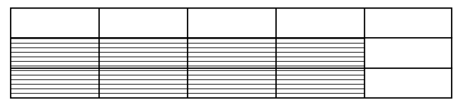


Como puede verse, el área de intersección contiene 8 de las 15 cuadrículas que se generaron al superponer los gráficos iniciales, lo que significa una región que representa los 8/15 de la unidad. Es decir, $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

c) *La multiplicación de fracciones como composición de operadores*: Desde esta perspectiva, una multiplicación como $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ significaría el resultado final de aplicar, en primer lugar, el operador 4/5 sobre la unidad, con lo que se llegaría al estado parcial 4/5 (4/5 x 1 = 4/5); y en segundo lugar, aplicar sobre esta fracción el operador 2/3, con lo que se llegaría –de acuerdo con lo expresado en **a)**– al estado final $\frac{8}{15}$ ($\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$). Pues bien, como partiendo de la unidad se puede llegar al estado final 8/15 por la aplicación de un solo operador, 8/15 (8/15 x 1 = 8/15), se deduce que el producto de dos fracciones puede considerarse como la composición (aplicación sucesiva) de dos operadores fraccionarios sobre la unidad. Veamos esto en el contexto gráfico:

Estado inicial	1er operador	Estado parcial
1	4/5	

	2° operador	Estado final
	2/3	

Estado inicial	1er operador	Estado final
1	8/15 = $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$	

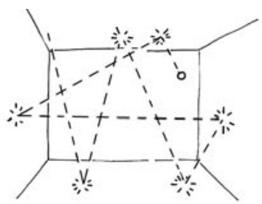
Al terminar de revisar los diversos significados atribuibles a la multiplicación de fracciones, podemos establecer dos grandes conclusiones:

1) En cualquiera de sus campos de significado, el producto de dos fracciones es *una fracción que tiene como numerador el producto de ambos numeradores y como denominador el producto de ambos denominadores.*

2) A partir de sus versiones primera y última se desprende que *la fracción **a/b** posee dos posibles significados funcionales: "funciona" como un estado y como un operador* (Dienes, 1972). En el primer caso se resalta su sentido *estático*: indica la relación entre el número ***a*** de partes que se consideran de un todo dividido en ***b*** partes congruentes, y el número total ***b*** de estas partes. En el segundo, su sentido *dinámico*, operativo: indica que el otro factor (entero o fraccionario), considerado como un todo, se divide en ***b*** partes, de las que se van a considerar ***a*** de ellas.

¿Cuántos días son los 2/3 de los 3/4 de un lapso de 360 días?

Puede procederse por pasos, llevando las respuestas a días (**3/4** de **360** días son **270** días; **2/3** de **270** días son **180** días). Pero también puede aplicarse el operador compuesto o producto: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = 1/2$. Así, **1/2 x 360 días = 180 días**.

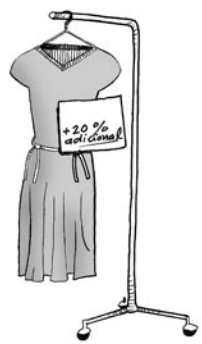


Una pequeña bola de goma tiene la propiedad de rebotar hasta los 9/10 de su altura de caída. Si se suelta desde 1 metro de altura, ¿qué altura alcanzará en su tercer rebote?

Una manera sencilla de resolver el problema es proceder por pasos, es decir, por rebotes de la bola de goma: el primer rebote llega hasta una altura de $\frac{9}{10}$ **x 1 m = 0,9 m**. El segundo, hasta una altura de $\frac{9}{10}$ **x 0,9 m = 0,81 m**. Y el tercero, hasta la altura de $\frac{9}{10}$ **x 0,81 m = 0, 729 m**.

Otra forma de plantearse la solución es pensando en **9/10** como operador que se aplica **tres** veces a la altura inicial de **1 m**. Así, la respuesta se obtiene mediante el producto $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times 1\text{ m} = 9^3/10^3 \times 1\text{ m} = 0{,}729\text{ m}$. [Este procedimiento permite generalizar la solución del problema a cualquier número ***n*** de rebotes y a cualquier factor de rebote ***r***. Así, si la altura inicial es a, la altura alcanzada en el rebote n será: $a \times r^n$].

En una tienda de ropa, un vestido de señora se vendía por 1.200 pesos. Al cabo de un mes, el vendedor le aplicó un 30% de descuento; pero como seguía sin venderse, decidió rematarlo con un descuento adicional del 20% sobre el último precio. ¿Cuál fue el precio definitivo de venta?



Si consideramos estos porcentajes como expresiones de fracciones (**30/100** ó **3/10**, y **20/100** ó **1/5**, respectivamente), podemos calcular el primer descuento: $\frac{3}{10}$ **x 1.200 = 360 pesos**, y de ahí el precio correspondiente: **1.200 – 360 = 840 pesos**. Ahora procedemos igual para el segundo descuento: $\frac{1}{5}$ **x 840 = 168 pesos**, y para el precio definitivo: **840 – 168 = 672 pesos**.

Pero como nos piden el precio final, podíamos haber abreviado el proceso averiguando los porcentajes de precios que conservaba el vestido en cada fase de descuento (**70%** ó **7/10** en la primera fase, y **80%** ó **4/5** en la segunda fase), y aplicándolos sucesivamente como operadores multiplicativos. Así, el precio en el primer descuento sería: $\frac{7}{10}$ **x 1.200 = 840 pesos**; y en el segundo: $\frac{4}{5}$ **x 840 = 672 pesos**. O bien, finalmente, podríamos haber aplicado un solo operador multiplicativo, el producto de los dos operadores: $\frac{7}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{50}$, lo que nos lleva directamente a: $\frac{28}{50}$ **x 1.200 = 672 pesos**.

En el problema anterior, ¿cuál es el descuento definitivo que se aplica al precio del vestido en relación con el precio inicial?

Desde luego, hay que rechazar como respuesta la suma de los descuentos progresivos (**30% + 20% = 50%**)... Tampoco se resuelve aplicando los descuentos como operadores progresivos (como se acaba de hacer con los precios progresivos en cada fase de descuento), porque en este caso se tendría un descuento total de $\frac{3}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$, es decir, del **6%,** que contradice el sentido común.

Una forma de resolver el problema es la que utilizamos en la parte final del problema anterior: aplicar el producto de los dos operadores referidos a los precios progresivos, $\frac{7}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{50}$ ó su equivalente $\frac{56}{100}$. Esto nos indica que ésa es la relación entre el precio final y el inicial. Por consiguiente, el descuento final es: $1 - \frac{56}{100} = \frac{100}{100} - \frac{56}{100} = \frac{44}{100}$, es decir, un **44%** [Estos problemas pueden resolverse también por la vía del razonamiento proporcional, aplicando la técnica de la regla de tres, como veremos en el próximo Cuaderno].

5.3. Propiedades de la multiplicación de fracciones

a) Conmutativa: El orden en que se multiplican dos fracciones no modifica su producto. Ya lo mencionamos al considerar las fracciones como operadores. La propiedad también es evidente si ambas se consideran como las medidas de los lados de un rectángulo.

b) Asociativa: Si hay más de dos factores, el orden progresivo en que "entran" en la multiplicación es indiferente: el resultado siempre es el mismo. Entendida la multiplicación de fracciones como composición de operadores, esto significa que el resultado final no queda afectado por el orden de aplicación en que se toman los operadores.

c) Existencia de un elemento reductor: Es decir, la fracción **0**; cuando multiplica a otra fracción, el producto es **0**.

d) Existencia de un elemento neutro: Es decir, la fracción **1**; cuando multiplica a una fracción, ésta no varía.

e) Existencia de un elemento inverso: Esta es una propiedad nueva con respecto al caso de la multiplicación de números naturales. En términos de la fracción como operador, significa que existe un operador inverso para cada uno de los operadores-fracciones (excepto para el **0**). Por ejemplo, si el operador **2/3** lleva de **1** a **2/3** (**2/3 x 1 = 2/3**), el operador **3/2** lleva de **2/3** a **1** ($\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$). O también, si el operador **4/5** lleva de **2/3** a **8/15** ($\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$), el operador **5/4** lleva de **8/15** a **2/3** ($\frac{5}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{2}{3}$).

Gráficamente:

$1 \longrightarrow$ (operador 2/3) $\longrightarrow 2/3$
$2/3 \longrightarrow$ (operador 4/5) $\longrightarrow 8/15$
$2/3 \longleftarrow$ (operador 5/4) $\longleftarrow 8/15$
$1 \longleftarrow$ (operador 3/2) $\longleftarrow 2/3$

Como puede observarse, *la fracción inversa de cualquier otra (excepto del 0) se obtiene invirtiendo sus términos, numerador y denominador*. Así, la fracción inversa de **8/15** es **15/8**; la de **1/4** es **4**; la de **2** es **1/2**; la de **1** es **1**, etc. Obsérvese que siempre *el producto de una fracción por su inversa es igual a 1, que es el elemento neutro de la multiplicación*.

f) Distributiva con respecto a la suma y a la resta: Cuando uno de los factores es una suma indicada, el otro factor puede multiplicar a cada uno de los sumandos o bien a la suma de los mismos. Análogamente, cuando uno de los factores es una resta indicada, el otro factor puede multiplicar al minuendo y al sustraendo o bien a la diferencia de los mismos.

¿Cuál es el valor de $1\frac{2}{3}$ de 12? ¿Y el de los 11/12 de 36?

Para obtener "los $1\frac{2}{3}$" de **12**, podemos llevar la fracción a su forma impropia: $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, y aplicar este operador a **12**; así: $\frac{5}{3} \times 12 = \frac{5 \times 12}{3} = 20$. También puede procederse distributivamente: $1\frac{2}{3} \times 12 = (1 + \frac{2}{3}) \times 12 = 1 \times 12 + \frac{2}{3} \times 12 = 12 + \frac{24}{3} = 12 + 8 = 20$.

Análogamente, aplicando el operador: $\frac{11}{12} \times 36 = \frac{11 \times 36}{12} = 33$. Pero también puede ser: $\frac{11}{12} \times 36 = (1 - \frac{1}{12}) \times 36 = 1 \times 36 - \frac{1}{12} \times 36 = 36 - \frac{36}{12} = 36 - 3 = 33$.

5.4. La potenciación de fracciones

Nos falta decir una palabra acerca de la *potenciación de fracciones*. Conservando el concepto que dábamos en el Cuaderno nº 6 acerca de la operación, definimos la potencia de una fracción $(a/b)^n$ como el producto repetido de la fracción a/b por sí misma n veces: $(a/b)^n = a/b \times a/b \times \ldots \times a/b = a^n/b^n$. Por consiguiente, *la potencia n-ésima de una fracción es otra fracción cuyos numerador y denominador* *son las potencias* **n***-ésimas del numerador y del denominador, respectivamente, de la fracción dada*.

Un caso muy particular de potencias de fracciones es el de las fracciones decimales, es decir, las de la forma $(1/10)^n$, $n \geq 0$. Así, si:

$n = 0$, $(1/10)^0 = 1^0/10^0 = 1/1 = 1$ $\longrightarrow$ una **unidad**
$n = 1$, $(1/10)^1 = 1/10 = 0{,}1$ $\longrightarrow$ una **décima**
$n = 2$, $(1/10)^2 = 1^2/10^2 = 1/100 = 0{,}01$ $\longrightarrow$ una **centésima**
$n = 3$, $(1/10)^3 = 1^3/10^3 = 1/1000 = 0{,}001$ $\longrightarrow$ una **milésima**
etc.

Como podemos ver, disponemos de otra forma de representación de los decimales (ver Cuaderno nº 2), entendidos ahora como potencias de fracciones cuya base siempre es la fracción **1/10**. Además, el exponente coincide, en cada caso, con el número de decimales de la unidad decimal correspondiente.

Las potencias correspondientes a una millonésima, a una cienmilésima y a una diezmilésima son, respectivamente: $(1/10)^6$, $(1/10)^5$ y $(1/10)^4$.

Un número decimal como **0,03** puede representarse ahora como $3 \times 0{,}01 = 3 \times (1/10)^2$. Análogamente **0,582** como $582 \times (1/10)^3$, o como $5 \times 1/10 + 8 \times (1/10)^2 + 2 \times (1/10)^3$, según convenga.

6. La división de fracciones

Al igual que con el resto de las operaciones, tenemos que preguntarnos por el sentido que puede tener una división de fracciones como $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$. Llinares y Sánchez afirman que "su vinculación a procedimientos o situaciones intuitivas es tan remota que podemos aceptar que no existen" (1988: 151). Sin embargo, sí es posible hallar algún sentido. Pero antes de desarrollar este punto, y como en el caso de la multiplicación, debemos indicar que también aquí estamos restringidos a tres sistemas de representación en los que cabe efectuar la división de fracciones: al decimal (con expresiones decimales exactas), al numérico (nos centraremos aquí también en éste), y al gráfico continuo (como visualización).

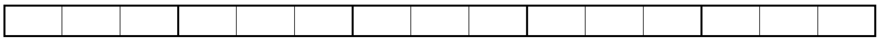
Uno de los significados asignables a la división de dos fracciones es el relacionado con la comparación de ambas magnitudes, no en el sentido de cuál es la diferencia entre ambas (relación aditiva), sino de cuántas veces es mayor una con respecto a la otra o de cuántas veces está contenida ("cabe") una en la otra. Un segundo significado hace alusión al operador inverso derivado de una posible multiplicación previa. Veamos estos dos casos.

En el primero, podemos formularnos tres preguntas según sea la relación entre las fracciones que se dividen, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ (nos referiremos a ellas como 1ª y 2ª, respectivamente):

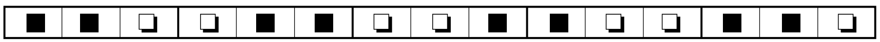
Pregunta	Situación	Ejemplos
¿Cuántas "veces" cabe la 2ª fracción en la 1ª?	1ª fracción ≥ 2ª fracción	**6 : 2; 7 : 4; 1 : 1/2; 5 : $\frac{2}{3}$; $\frac{9}{2}$: 4; $\frac{3}{4}$: $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$: $\frac{8}{10}$**
¿Cuál es la enésima parte de la 1ª fracción?	La 2ª fracción es entera	**6 : 2; 7 : 4; 2 : 6; 4 : 9; 1/4 : 3; $\frac{9}{2}$: 4**
¿Qué parte de la 2ª fracción cabe en la 1ª?	1ª fracción < 2ª fracción	**2 : 6; 4 : 9; 1 : $\frac{4}{3}$; 1/4 : 3; $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{4}$**

Veamos gráficamente el sentido de un par de los ejemplos dados: **a)** $5 : \frac{2}{3}$; y **b)** $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$.

a) 5 : 2/3. Graficamos las 5 unidades concatenadas y divididas en 3 cuadrículas cada una:



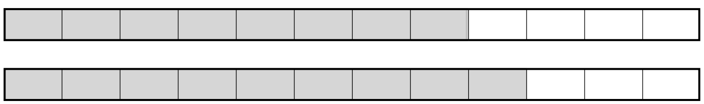
Vamos a "ver" cuántas veces está contenido 2/3 (representado alternativamente por ■■ y ❏❏ para ayudarnos en la visualización) en el espacio de las 5 unidades:



veces: ←1 → ←1 → ←1 → ←1 → ←1 → ←1 → ←1 → 1/2

La gráfica nos muestra que 2/3 cabe "**7 veces y media**" en 5; es decir, $5 : \frac{2}{3} = 7\ 1/2 = \frac{15}{2}$.

b) $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$. La pregunta ahora es qué parte de 3/4 cabe en 2/3 (puesto que 2/3 < 3/4). Si –con el fin de poder compararlas– llevamos ambas fracciones a sus representaciones equivalentes de igual denominador, 8/12 y 9/12, respectivamente:



vemos que de las 9 cuadrículas de 3/4 (en su forma 9/12) sólo caben 8 en 2/3 (en su forma 8/12). Es decir, que sólo 8/9 de 3/4 están contenidos en 2/3. Por lo tanto, $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$.

Si ahora analizamos ambos resultados descubrimos que: $5 : \frac{2}{3} = \frac{15}{2} = 5 \times \frac{3}{2}$, y que $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3}$. En otras palabras, *el resultado de dividir una fracción entre otra coincide con el resultado de multiplicar la primera por la fracción inversa de la segunda*.

Ya hemos conseguido una forma de obtener el resultado de la división de dos fracciones, pero todavía tenemos que profundizar en su significado. Para ello nos remitimos al terreno de las fracciones como operadores multiplicativos. En uno de los ejemplos mostrábamos que $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ podía entenderse como la acción de la fracción-operador 4/5 sobre la fracción-estado 2/3 para llegar a la fracción-estado 8/15. Si ahora planteamos la división $\frac{8}{15} : \frac{4}{5}$, sabemos que su resultado debe ser 2/3 (por el carácter opuesto que poseen ambas operaciones). Pero, como lo mostrábamos gráficamente,

2/3 ⟶ (operador 4/5) ⟶ 8/15
2/3 ⟵ (operador 5/4) ⟵ 8/15

de 8/15 pasamos a 2/3 por la acción del operador multiplicativo 5/4 (inverso de la fracción-operador 4/5); es decir, $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \times \frac{5}{4} = \frac{2}{3}$.

Por lo tanto, *dividir una fracción-estado (8/15) entre una fracción-operador (5/4) para llegar a una segunda fracción-estado (2/3) representa la "operación" inversa de una multiplicación previa, y equivale a multiplicar la primera fracción-estado (8/15) por la fracción-operador inversa (5/4) de la utilizada en la multiplicación previa (4/5)*.

La "regla" para dividir fracciones es, pues, sencilla: se multiplica la primera por la fracción inversa de la segunda. La regla derivada –se multiplican en cruz numeradores y denominadores– debe ser, en todo caso, descubierta por los propios aprendices...

Si el 150% de un número es 225, ¿cuál es el número?

Considerando a **150%** como la fracción **150/100 = 3/2**, el enunciado nos describe la situación de una magnitud inicial desconocida, a la cual se aplica el operador **3/2** para llegar al resultado **225**. Para "regresarnos" de aquí hacia la magnitud desconocida debemos aplicar el operador inverso **2/3** a **225**; es decir, $\frac{2}{3} \times 225 = \frac{2 \times 225}{3} = 150$. [Este problema también puede resolverse mediante la aplicación de la técnica de la regla de tres, como veremos en el Cuaderno siguiente].

21. *Dos quintas partes de un número es el doble de **15**. ¿Cuál es el número?*

¿Cuántas veces 3/4 es 18?

Evidentemente, se trata de dividir $18 : \frac{3}{4} = 18 \times \frac{4}{3} = \frac{18 \times 4}{3} = 24$ veces.

22. *Resuelva:* $\frac{2}{3} : \frac{8}{3}$; $\frac{1}{5} : 7$; **2 3/4 : 1/2**; $\frac{5}{7} : \frac{15}{14}$; $1\frac{1}{5} : 3\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5} : \frac{1}{7}$; $0 : \frac{3}{8}$; $6 : \frac{1}{9}$; $1 : \frac{5}{3}$; $\frac{7}{4} : \frac{7}{8}$; **0,83 : 0,1**; *¿cuántas veces* $\frac{4}{5}$ es $\frac{6}{3}$?

23. ¿Cuál es el valor de la mitad de **(1/2 : 1/2)**?

24. *¿Cuántas unidades hay que agregar al denominador de **2/3** para que la fracción se reduzca a su mitad?*

Probablemente los lectores ya han percibido que la división entre fracciones no tiene restricciones (salvo que la segunda fracción no puede ser **0**): siempre se puede efectuar, no importa si la primera fracción es mayor, igual o menor que la segunda, y el resultado es siempre otra fracción. Es decir, toda fracción (excepto **0**) "divide" a cualquier otra, y cualquiera de ellas es "dividida" por todas las demás (excepto por **0**). Por esta razón no se habla de "divisibilidad" entre fracciones como algo singular y restringido, como ocurría con los números naturales; aquí no necesitamos un Cuaderno adicional sobre ese tema...

Una última palabra sobre las operaciones de multiplicar y dividir fracciones: necesitamos familiarizarnos también con ellas, aplicarlas mentalmente y no enredarnos tanto con reglas escritas. Por ejemplo: la "mitad" (entendida como dividir entre 2, o multiplicar por 1/2) de una fracción puede obtenerse duplicando el denominador (la mitad de 3/5 es 3/10) o bien reduciendo el numerador a su mitad, si es par (la mitad de 6/7 es 3/7). Análogamente, el "triple" de una fracción puede obtenerse triplicando el numerador (el triple de 3/5 es 9/5) o bien reduciendo el denominador a su tercera parte, si es múltiplo de 3 (el triple de 7/15 es 7/5). Y así en los demás casos.

Resuelva mentalmente las siguientes operaciones: la mitad de 2/3; cuatro veces 5/12; la quinta parte de 10/11; la sexta parte de 2/3; el doble de 7/10; cinco veces 7/25; 2/5 : 3/4

*Indique cuáles de los resultados de estas operaciones tienen un valor aproximado a **1** (intente resolverlo mentalmente):* **a)** $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{5}{6} : \frac{7}{8}$ **c)** $\frac{3}{10} \times 3$ **d)** $1\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$ **e)** $\frac{3}{5} : \frac{2}{3}$ **f)** $\frac{16}{5} : 3$ **g)** $\frac{1}{3} \times \frac{21}{5}$ **h)** $\frac{11}{7} : \frac{15}{8}$

7. La resolución de problemas en el campo de las fracciones

En el campo de las fracciones, los problemas pueden referirse a la utilización del concepto de fracción y de sus diversas representaciones, así como al uso de las operaciones con fracciones. Todo ello en situaciones abstractas –referidas a las representaciones simbólicas de las fracciones– o de aplicación a contextos de la vida diaria. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que sugerimos a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

a) Vaciando **18** litros de gasolina en el tanque de un carro, el indicador del nivel de gasolina pasa de **1/4** a **5/8** de tanque. ¿Cuál es la capacidad total del tanque?

b) *Después de gastar **1/5** del sueldo en ropa, **1/4** en comida, **1/3** en alquiler y **1/6** en otros gastos, me quedaron **120** pesos. ¿Cuál es mi sueldo?*

c) El promedio de tres fracciones es **1**. Si dos de las fracciones son **6/5** y **3/2**, ¿cuál es la otra fracción?

d) *Un equipo de fútbol tiene que ganar, al menos, **3/5** de todos sus partidos si quiere pasar a la fase final. Hasta ahora, de **12** partidos sólo ha ganado el **50%**. Si faltan **13** partidos, ¿cuántos de éstos debe ganar, al menos, para clasificar a la fase final?*

e) Los alumnos de noveno grado de una escuela obtienen los siguientes resultados en una prueba sobre **20** puntos: **30%** salen aplazados; **1/4**, con notas entre **10** y **13** puntos (ambas puntuaciones incluidas); **15** alumnos, con notas entre **14** y **17** puntos (ambas puntuaciones incluidas); y **1/5**, con notas entre **18** y **20** puntos (ambas puntuaciones incluidas). Decida si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Hay **15%** de alumnos con notas entre **14** y **17** puntos

b) Hay un total de **90** alumnos de noveno grado

***c)* 7/10** de los alumnos aprobaron

d) Hay un total de **60** alumnos de noveno grado

e) Hay **25%** de alumnos con notas entre **14** y **17** puntos

f) El número de alumnos que sacaron entre **10** y **13** puntos es mayor que el de los alumnos que sacaron entre **14** y **17** puntos

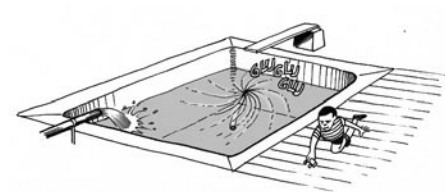
g) Hay un total de **80** alumnos de noveno grado

f) *¿Cuál es el **50%** del **150%** de **50**?*

g) Un pastel se corta quitando cada vez la **tercera** parte del pastel que hay en el momento de cortarlo. ¿Qué fracción del pastel original queda después de efectuar **tres** cortes sucesivos?

h) *Llevo dos días leyendo una novela. Ayer leí la **mitad** del libro y hoy la **tercera** parte de lo que me quedaba. ¿Qué fracción del libro me falta por leer?*

i) Una piscina vacía se llena con el agua de un grifo en **2** horas y, una vez llena, puede vaciarse en **3** horas por un desagüe ubicado en el fondo. Si con la piscina vacía y el desagüe abierto, alguien, distraídamente, abre el grifo, ¿al cabo de cuánto tiempo empezará a desbordarse el agua de la piscina?



j) *El número de viviendas de una urbanización es tal que si se vende la **cuarta** parte, quedan por vender menos de **118**; pero si se vende la **tercera** parte, quedarían por vender más de **103**. ¿Cuántas viviendas tiene la urbanización?*

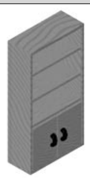
k) Hallar la fracción que verifica simultáneamente:

- la diferencia denominador-numerador es **3**
- la fracción es menor que **3/5**
- la fracción es mayor que **11/20**

l) *En un salón hay **99** niñas y **1** niño. ¿Cuántas niñas tienen que salir del salón para que las que queden representen el **98%** del total de infantes que quedan en el salón?*

m) Un padre reparte **96.000** pesos entre sus dos hijos, de modo que los **3/7** de lo que le da al mayor equivalen a los **3/5** de lo que recibe el menor. ¿Cuánto recibe cada hijo?

n) ***Tres*** *vendedores llegan a la playa con sendos bidones de limonada, con distintas cantidades de líquido en cada uno. Para conseguir la misma cantidad en los tres haría falta tomar* ***1/3*** *del primer bidón y agregárselo al segundo; después, pasar* ***1/4*** *del nuevo contenido de éste al tercero y, finalmente, llevar* ***1/10*** *de este último al primero. Con ello se conseguiría que en cada bidón hubiese* ***9*** *litros de limonada. ¿Qué cantidad de refresco había inicialmente en cada envase?*



ñ) Por mudarse de vivienda, Rafael vende un armario y una cama, cada uno a **600** pesos. El armario se vende un **20%** por encima de su precio de costo, mientras que la cama, un **20%** por debajo de su precio de costo. Rafael piensa que así ni gana ni pierde respecto a lo que le costaron ambos muebles. ¿Está en lo cierto?

o) *En un almacén se produjo una invasión de insectos dañinos. A pesar de que se fumigó con un determinado producto, los insectos no han desaparecido. Consultado sobre el caso, otro experto asegura que ese insecticida pierde cada semana un* ***25%*** *de la toxicidad que mostraba la semana anterior. Si, actualmente, el insecticida ya ha llegado a tener menos del* ***20%*** *del agente tóxico que mata a los insectos, ¿hace cuántas semanas que se fumigó?*

p) Adela gana **120** pesos diarios, más el **4%** sobre el monto de las ventas del día. Al cabo de **18** días laborales recibe **4.220** pesos. ¿Cuál fue el monto total de las ventas durante esos días?

Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) La variación en el indicador del tanque de gasolina viene dada por la resta $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}$, es decir, por la resta $\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$. Si **3 octavos** de tanque equivalen a **18** litros, **1 octavo** corresponde a **6** litros, y **8** octavos –el tanque lleno–, a **8 x 6 = 48** litros. Obsérvese el uso de la representación verbal (**3**, **1** u **8 octavos**) de las fracciones...

b) Se trata de ver qué parte del sueldo (el todo) se ha gastado e identificar lo no gastado con los **120** pesos. El monto gastado viene de la suma: $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{12}{60}+\frac{15}{60}+\frac{20}{60}+\frac{10}{60}=\frac{57}{60}=\frac{19}{20}$. Lo que queda por gastar es $1-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}$. Si **un veinteavo** del sueldo equivale a **120** pesos, es fácil ver que el sueldo total es de **20 x 120 = 2.400** pesos.

c) Que el promedio de las tres fracciones sea **1** significa que su suma, dividida entre **3**, es igual a **1**. Por consiguiente, la suma de las tres fracciones debe ser igual a **3**. Ahora bien, la suma de las dos dadas es: $\frac{6}{5}+\frac{3}{2}=\frac{12}{10}+\frac{15}{10}=\frac{27}{10}$. Lo que falta para llegar a **3** es: $3-\frac{27}{10}=\frac{30}{10}-\frac{27}{10}=\frac{3}{10}$. También se podían haber utilizado los valores decimales de las fracciones $\frac{6}{5}+\frac{3}{2}$:

$= 1,2 + 1,5 = 2,7$; ahora lo que falta para **3** es **0,3**, que equivale a la fracción **3/10**.

d) De los datos del problema deducimos algunos valores de interés:

- se juegan **25** (**12 + 13**) partidos
- se deben ganar: **3/5 x 25** partidos = **15** partidos
- hasta ahora se han ganado: **50% x 12** partidos = **1/2 x 12** partidos = **6** partidos

Por consiguiente, hay que ganar al menos **9** de los **13** partidos restantes.

e) Leído con atención el enunciado, se ve que antes de responder a cada una de las afirmaciones es preciso conocer por completo la distribución de los alumnos por rangos de notas. Para ello disponemos de los datos en forma numérica: **3/10** aplazados; **1/4** entre 10 y 13 puntos; **1/5** entre 18 y 20 puntos. Entre estos tres rangos de alumnos tenemos: $\frac{3}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. Luego la cuarta parte ($1 - \frac{3}{4} = 1/4$) equivale a los **15** alumnos con notas entre 14 y 17 puntos. Si la cuarta parte del total es **15**, este total está formado por **4 x 15 = 60** alumnos de noveno grado.

Ahora sabemos que la distribución de alumnos es: **18** aplazados (**30%** ó **3/10**), **15** entre 10 y 13 puntos (**1/4**), **15** entre 14 y 17 puntos (**1/4**) y **12** entre 18 y 20 puntos (**1/5**). A partir de aquí puede decidirse acerca de la veracidad de cada afirmación.

f) Si consideramos los porcentajes como fracciones, el problema se enunciaría: ¿Cuánto es la **mitad** (**50%**) de los **3/2** (**150%**) de **50**? Cuestión que se resuelve –como ya sabemos– considerando ambas fracciones como operadores, lo que nos lleva a la multiplicación: $(1/2 \times \frac{3}{2}) \times 50 = \frac{3}{4} \times 50 = \frac{3 \times 50}{4} = 150/4 = 75/2$ [El problema también puede resolverse en el campo de la proporcionalidad, como veremos en el Cuaderno nº 11].

g) Vamos a seguir el proceso de cortes sucesivos del pastel mediante la siguiente tabla:

Corte nº	Porción inicial del pastel	Porción cortada	Porción restante del pastel original
1	1	$1/3 \times 1 = 1/3$	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
2	2/3	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$
3	4/9	$\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$	$\frac{4}{9} - \frac{4}{27} = \frac{12}{27} - \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$

Así, después del tercer corte queda una porción equivalente a **8/27** del pastel original. El problema podría haberse resuelto más directamente si hubiéramos considerado la parte del pastel que "queda" después de cada corte (y no la que se "quita"...). Esta parte que queda es **2/3** de cada porción inicial. Esta fracción actúa como operador en cada corte. Así, si la porción inicial es **1** (el pastel completo), la que queda después de 3 cortes es: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 = (2/3)^3 \times 1 = 8/27$ del pastel inicial. Obsérvese la similitud de esta solución con la planteada en el problema **b)**.

h) Una manera sencilla de resolver el problema es imaginando el número de páginas que pueda tener el libro. Supongamos que son **60**. Entonces, ayer leí **30** (la **mitad**) y hoy, **10** (la **tercera** parte de las **30** que me quedaban). Así, me faltan por leer **20** páginas, que representan **1/3** de las **60** que contiene el libro. Esta fracción se conserva, cualquiera que sea el número de páginas del libro (puede verificarlo con otros números).

También puede resolverse a partir de las fracciones indicadas: Si ayer leí la mitad, para hoy me quedaba **1/2** del libro; leer **1/3** de esta mitad significa considerar **1/3** como operador de **1/2** (o dividir **1/2** entre **3**): hoy he leído $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ de todo el libro. Por consiguiente, llevo leído $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ del libro, es decir, $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ del libro. Me falta: $1 - \frac{4}{6} = \frac{6}{6} - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = 1/3$ del libro [Trate ahora de resolver el problema gráficamente...].

i) Según el enunciado, el ritmo de llenado de la piscina es superior al ritmo de su vaciado; por consiguiente, en la situación indicada la piscina empezará a llenarse lentamente y se desbordará a partir del momento en que se llene completamente. Una forma de llegar a la respuesta es preguntándonos qué ocurre, por ejemplo, en una hora. De acuerdo con los datos, en 1 hora se llena **1/2** de la piscina y se vacía **1/3** de la misma. La cantidad de agua que queda al cabo de una hora viene dada por la resta $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ de la piscina. Por lo tanto, se llenará en **6** horas y a partir de ahí empezará a desbordarse.

j) El primer dato de la venta nos indica que los **3/4** del número de viviendas es menor que **118**; y el segundo dato, que los **2/3** del número de viviendas es mayor que **103**. Además, si puede hablarse tanto de la 4ª como de la 3ª parte, concluimos que el número de viviendas de la urbanización es un múltiplo de **12**.

Uno de los métodos para resolver el problema es, de nuevo, el de ensayo y ajuste a partir de los múltiplos de **12** cuyos **3/4** sean menores que **118** (1ª condición) y cuyos **2/3** sean mayores que **103** (2ª condición). Así, podemos probar con el número **120** (cumple la 1ª condición, pero no la 2ª), con el número **180** (cumple la 2ª condición, pero no la 1ª) y con otros, hasta llegar a la respuesta: **156**. En efecto, $\frac{3}{4} \times 156 = 117 < 118$, y $\frac{2}{3} \times 156 = 104 > 103$. La urbanización cuenta con **156** viviendas.

k) Si nos referimos a los valores decimales de las fracciones, la 2ª y 3ª condiciones nos aseguran que el valor de la fracción buscada se halla entre **0,55** (**11/20**) y **0,6** (**3/5**). Por lo tanto, es un valor ligeramente superior a **1/2**, lo que nos sugiere la presencia de fracciones cuyo numerador es ligeramente mayor que la mitad del denominador. De este tipo son las fracciones: **3/5**, **4/6**, **4/7**, **5/8**, **5/9**, **6/10**, **6/11**, etc. Si consideramos ahora la 1ª condición, la selección se reduce a **4/7** y **5/8**, y el ensayo nos deja la única opción, **4/7**, cuyo valor decimal es **0,571**...

l) El porcentaje inicial de niñas es del **99%** (**99** niñas y **1** niño). Pudiera pensarse –de una forma muy "automática"– que basta retirar a **1** niña para alcanzar el porcentaje deseado del **98%**. Pero si se hace así, quedarían en el salón **98** niñas y **1** niño (**99** infantes), con lo cual el porcentaje de niñas sería **(98/99) x 100%**, que es **98,989%**, mayor que **98%**. Está claro, pues, que deben retirarse más niñas.

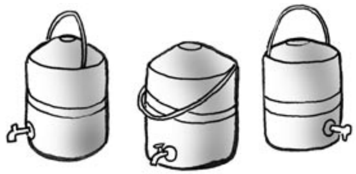
Para saber cuántas, observemos que el denominador de la fracción que va a dar el porcentaje va a ser **1** unidad mayor que el numerador de dicha fracción. Por otro lado, el porcentaje final que se desea (**98%**), representado como fracción numérica, es **98/100**, que es equivalente a **49/50**. Esta fracción cumple con la condición anterior. Por lo tanto, deben retirarse **50** niñas del salón para que las **49** restantes representen el **98%** de todos (**50**) los infantes del salón.

m) De acuerdo con el enunciado, el hermano mayor recibe mayor asignación que el menor. Vamos a representar la situación gráficamente. Para ello, tomaremos la cantidad recibida por el mayor como un rectángulo dividido en **7** cuadrículas congruentes, y la recibida por el menor, como un rectángulo dividido en **5** cuadrículas congruentes:

Recibido por el hermano mayor:

Recibido por el hermano menor:

Las cuadrículas son del mismo tamaño puesto que el contenido de las tres primeras del mayor debe ser igual al de las tres primeras del menor, con lo que debe ser igual en todas. Ahora percibimos que el padre debe "distribuir" equitativamente los **96.000** pesos en **12** cuadrículas, por lo que en cada una de ellas se depositarán **96.000 : 12 = 800** pesos. De modo que el mayor percibirá **7 x 800 pesos = 5.600** pesos y el menor, **5 x 800 pesos = 4.000** pesos.



n) Podemos representar todo el proceso en **4** pasos, si consideramos la situación inicial como el paso **1**. En la siguiente tabla se muestra la situación final:

Paso nº	Situación resultado		
	Bidón 1	Bidón 2	Bidón 3
4	9	9	9

La última acción, la que lleva a la situación final, afecta a los bidones **1** y **3**. Para inferir la situación anterior, pensemos que el bidón **3** tenía tal cantidad de líquido que al extraerle **1/10** llegó a **9** litros: estos **9** litros representan, pues, **9/10** de la cantidad anterior; fácilmente se desprende que tal cantidad era de **10** litros, de la que se sacó **1** litro (**1/10**) para verterlo en el bidón **1**. Consecuentemente, éste tenía **8** litros en ese momento. He aquí la tabla con la información de los dos últimos pasos:

Paso nº	Situación resultado		
	Bidón 1	Bidón 2	Bidón 3
4	9	9	9
3	8	9	10

Procediendo de una manera análoga para los demás pasos se llega a completar la tabla anterior, que describe así todo el proceso:

Paso nº	Situación resultado		
	Bidón 1	Bidón 2	Bidón 3
4	9	9	9
3	8	9	10
2	8	12	7
1	12	8	7

¿Se le ocurre otra serie similar de transformaciones –dadas en forma de fracciones– que puedan llevar la distribución de limonada desde la situación inicial hasta la final?

ñ) Conocemos los precios de venta de ambos muebles: **600** pesos; vamos a averiguar sus precios de compra. Como el armario se vende al **120%** (**6/5**) de su precio de costo, aplicamos a **600** el operador inverso **5/6**, con lo que llegamos a: **600 x** $\frac{5}{6}$ **=** **500** pesos. Rafael gana **100** pesos en esta venta.

Análogamente, la cama se vende al **80%** (**4/5**) de su precio de costo; para saber su precio de compra, aplicamos a **600** el operador inverso **5/4**, con lo que llegamos a: **600 x** $\frac{5}{4}$ **=** **750** pesos. Rafael pierde **150** pesos en la venta de la cama. Así que, en conjunto, Rafael pierde **50** pesos en esta venta simultánea.

o) El procedimiento de resolución puede consistir en averiguar con qué porcentaje de toxicidad trabaja el insecticida cada semana (**75%** de la que mostraba la semana anterior), y detectar así en qué semana se ubica tal porcentaje por debajo del **20%**. Ese proceso puede recogerse en la siguiente tabla:

Semana	% toxicidad inicial	% toxicidad para la próxima semana
1	100	100 x 75% = 75
2	75	75 x 75% = 56,25
3	56,25	56,25 x 75% = 42,19
4	42,19	42,19 x 75% = 31,64
5	31,64	31,64 x 75% = 23,73
6	23,73	23,73 x 75% = 17,80

Por consiguiente, la observación del porcentaje de toxicidad por debajo del **20%** ocurre al comienzo de la **7ª** semana. En ese momento, hace **6** semanas que se fumigó.

p) En sus **18** días laborales, Adela ha percibido **18 x 120 = 2.160** pesos por concepto de salarios diarios fijos. Por lo tanto, por concepto de porcentajes sobre el monto de las ventas del día ha recibido **4.220 – 2.160 = 2.060** pesos, correspondientes al **4%** de comisión sobre las ventas.

Para conocer el monto total de estas ventas podemos aplicar a **2.060** pesos el operador inverso al **4%**, es decir, **100/4** que es **25**. El monto de las ventas será: **2.060 x 25 = 51.500** pesos.

8. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"...

25. Decida si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa:

a) El valor de una fracción no varía si se multiplican numerador y denominador por una misma cantidad **> 1**

b) Ídem, si se suma o resta una misma cantidad **> 0** al numerador y al denominador

c) La suma de dos fracciones propias es siempre mayor que la unidad

d) La suma de dos fracciones es siempre mayor que cada una de ellas

e) La suma de dos fracciones propias no puede ser nunca un número entero

f) En alguna oportunidad, el producto de dos fracciones puede ser igual a una de ellas

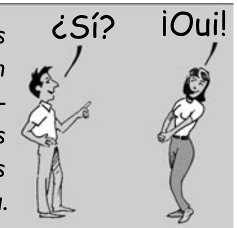
g) Al dividir una fracción entre otra, el resultado nunca puede ser mayor que la primera fracción

h) Al multiplicar dos fracciones, el producto siempre es mayor que cada una de ellas

26. *La suma de una fracción y su inversa es **17/4** y la diferencia entre ambas, **15/4**. ¿Cuáles son las fracciones?*

27. Rosa ha pasado **2/5** de sus vacaciones en la casa de su hermano; **1/3**, en la de su abuelita; **1/5**, en un campamento, y **3** días de retiro. ¿Cuánto duraron sus vacaciones?

28. *El **70%** de los habitantes de un país habla un idioma y el **60%** de los mismos habitantes habla otro idioma. Si cada habitante habla al menos **1** idioma, ¿qué porcentaje de los mismos habla los **dos** idiomas?*



29. ¿Cuántas veces contiene **2** a **1/2**? ¿Y **3** a **1/3**? ¿Y **4** a **1/4**? ¿Y ***n*** a **1/*n***?

30. *Si a los **2/3** de un número se le suman **24** unidades, se obtiene el **doble** del número. ¿De qué número se trata?*

31. Si en una fracción impropia se restan **2** unidades al numerador y al denominador (suponga que puede hacerlo), ¿la fracción resultante es menor o mayor que la inicial? ¿Y si se hace lo mismo en una fracción propia?

32. *Interpole **4** fracciones entre **1/2** y **1**. Hágalo como lo desee.*

33. Se coloca un pastel sobre un plato de la balanza y se equilibra con las **3/4** partes de un pastel similar, más un peso de **3/4** de kg. ¿Cuánto pesa el pastel?

34. *Dibuje un triángulo equilátero y trace unos círculos pequeños en sus vértices y en la mitad de sus tres lados. Se trata ahora de colocar dentro de cada uno de esos círculos una de las siguientes fracciones: **1/6**, **1/3**, **1/2**, **2/3**, **5/6** y **1**, de tal modo que la suma de las fracciones colocadas en cada lado del triángulo (dos vértices y una posición central) sea **2**.*

Dadas dos fracciones distintas, formamos una nueva cuyo numerador es la suma de los numeradores de las dos fracciones dadas y cuyo denominador es la suma de los denominadores de las mismas fracciones. Verifique con diversos ejemplos si el valor de esta nueva fracción está comprendido entre los valores de las dos fracciones iniciales.

35. *Halle los números de dos cifras (escritos en la forma **AB**) tales que, si se les suman los **3/4** del propio número, se obtiene el número **BA**.*

36. Llevo recorridos **7/15** de un camino y aún me falta **1/3** de km para llegar a la mitad. ¿Cuál es la longitud del camino?

37. *Tres números naturales consecutivos son tales que **2/3** del mayor más **2/5** del intermedio suman igual que el menor más **3** unidades. ¿Cuáles son los números?*

38. El **30%** de un número es igual al **20%** de otro número. Averiguar cuáles son, si ambos números suman **50**.

39. *Se ha recibido un determinado número de solicitudes para un empleo. La **mitad** ha sido rechazada por no cumplir los requisitos. Otros **3** candidatos se excluyen después de la entrevista. El resto, **2/5** del número inicial de candidatos, pasa a otra etapa de selección. ¿Cuántas solicitudes se recibieron?*

40. Hallar la mitad de los tres cuartos de dos tercios.

41. *He aquí un problema ¿irreal? Si, a partir de hoy y en **35** años, el "medio" ambiente (**1/2**) actual pasa a ser un "tercio" de ambiente (**1/3**), y si se sigue al mismo ritmo de destrucción, ¿en cuánto tiempo llegaremos a no tener "ningún" ambiente (**0**)?*

Referencias bibliográficas

- Dienes, Z. P. (1972). *Fracciones*. Barcelona: Teide.

- Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. Las expresiones **e)** y **h)** **2.** 36 libros **3.** $1\frac{2}{5}$, $3\frac{1}{6}$, $10\frac{1}{2}$ **4.** 49 objetos **5.** 4,75; 0,4**6**; 1,2**27** **6.** 2213/1100, 15/4, 22/45, 53/99 **7.** a) 5 b) 5/2 c) 1 d) 400% e) 1000% f) 60% **8.** 4/7, 7/5, 3/2 **9.** No; Sí **10.** 13/20 < 2/3; 26/10 < 21/8; 0,45 < 5/11 **11.** a) 22/15 b) 3,8**3** c) 31/9 d) 163/315 e) 1 f) 1 **12.** m = 0, *n*: cualquier entero >0 **13.** 3 **14.** a) 7/15 b) 1/2 c) 1/9 d) 0,**87** e) 1/4 f) 0 **15.** 2 5/8 m **16.** 50 kg **17.** 14 1/2 años **18.** 5/48 **19.** 1 1/4 **20.** 5 litros **21.** 75 **22.** 1/4; 1/35; 11/2; 2/3; 18/55; 7/5; 0; 54; 3/5; 2; 15/2; 2 1/2 veces **23.** 1/2 **24.** 3 **25.** Verdaderas: a, f **26.** 4 y 1/4 **27.** 45 días **28.** 30% **29.** 4 veces; 9 veces; 16 veces; n^2 veces **30.** 18 **31.** Mayor; menor **32.** 3/5, 7/10, 4/5 y 9/10 **33.** 3 kilos **34.** Un lado: 1, 1/6, 5/6; otro lado: 5/6, 1/2, 2/3; tercer lado: 2/3, 1/3, 1 **35.** 12; 24; 36; 48 **36.** 10 km **37.** 19, 20 y 21 **38.** 20 y 30 **39.** 30 solicitudes **40.** 1/4 **41.** En 105 años (recuerde que ya hemos perdido "medio" ambiente)

Posdata: El desarrollo del sentido numérico

La presencia del conjunto de las fracciones nos permite disponer de un nuevo sistema de representación para los números, particularmente para los decimales. Y, consiguientemente, una alternativa adicional para realizar algunas operaciones. Así, por ejemplo, si tenemos que calcular $(6{,}5)^2$, podemos proceder:

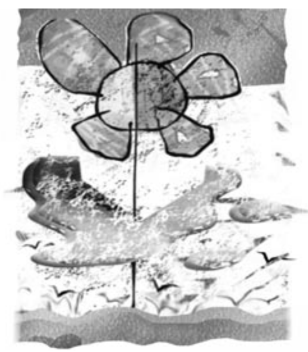
a) por la multiplicación directa habitual: $6{,}5 \times 6{,}5 = \ldots = 42{,}25$

b) aplicando las propiedades de la multiplicación: $6{,}5 \times 6{,}5 = (6 + 0{,}5) \times 6{,}5 = 6 \times 6{,}5 + 0{,}5 \times 6{,}5 = 39 + 3{,}25 = 42{,}\ 25$

c) por la vía del cuadrado de una suma (Cuaderno nº 6): $(6{,}5)^2 = (6 + 0{,}5)^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times 0{,}5 + (0{,}5)^2 = 36 + 6 + 0{,}25 = 42{,}25$

d) por la vía del cuadrado de una fracción: $(6{,}5)^2 = (65/10)^2 = (13/2)^2 = 13^2/2^2 = 169/4 = 42\ 1/4 = 42 + 0{,}25 = 42{,}25$

La capacidad para representarse un número (como 6,5) de diversas formas, para optar por una de ellas según sea la operación o actividad exigida, y para poder operar con soltura –y mentalmente– en esta diversidad, es una de las destrezas que tenemos que lograr. De quienes la han alcanzado se dice que han desarrollado un marcado sentido numérico. Y en rigor, el objetivo del aprendizaje de la aritmética es el desarrollo del sentido numérico de los aprendices.



Este libro se terminó de imprimir en el mes de junio de 2006.

Índice