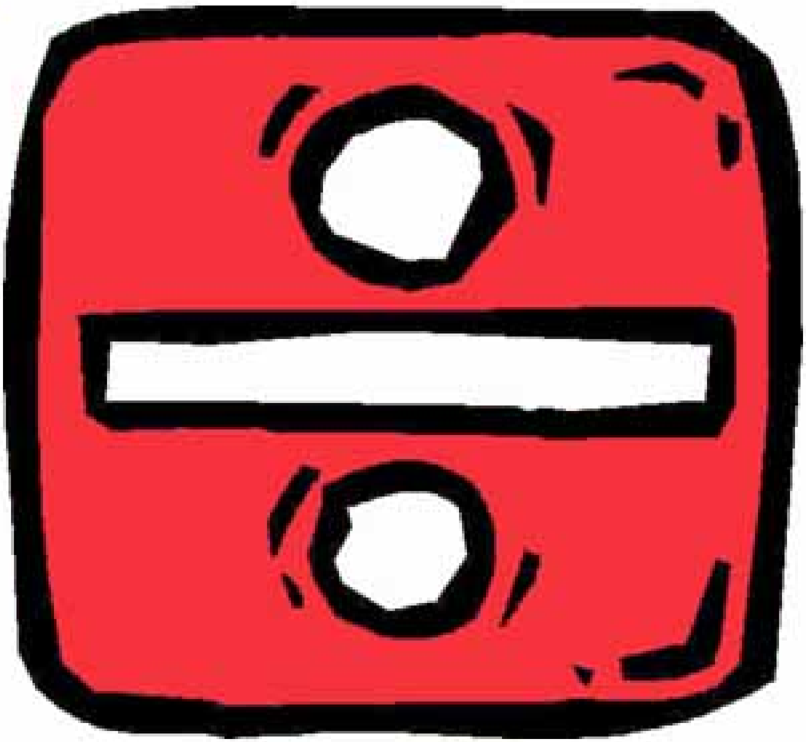
Serie

Desarrollo del pensamiento matemático

N° 7

División



Federación Internacional de Fe y Alegría

Proyecto
Desarrollo del pensamiento matemático

Cuaderno nº 7
División

Martín Andonegui Zabala
Enero 2004

A modo de introducción…

… y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

1. Un reloj adelanta 16 segundos durante el día y retrasa 10 segundos en la noche. Al empezar la mañana del 1º de abril se pone en la hora exacta. ¿Cuál es el primer día en el que llegará a tener 3 minutos de adelanto?

2. ¿Cuál es el mayor número menor que 100 tal que, al dividirse entre 23, produce un resto igual al cociente?

¿Cuál es el valor de 0,1 : 0,001?

3. Pedro tiene 43,75 pesos entre monedas de 0,25; 0,50; 1; 2 y 5 pesos. Si tiene el mismo número de monedas de cada tipo, ¿cuántas monedas tiene en total?

La diferencia de dos números naturales es 940 y el cociente exacto del mayor entre el menor es 11. ¿De qué números se trata?

4. Complete las casillas del siguiente cuadro:

	x		:		= 9
+	■	+	■	x	■
	+	5	-		= 7
:	■	:	■	-	■
	+		:		= 1
= 2	■	=4	■	= 3	■

5. Rafael tiene 40 años y la suma de las edades de sus tres hijos es 22 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Rafael será igual a la suma de las edades de sus tres hijos?

6. ¿Cuál es el menor número impar mayor que 1 tal que, al dividirse por 7 ó por 5, da como resto 1?

7. Se reparten 134 libros en seis cajas A, B, C, D, E y F. En cada caja y siguiendo el orden anterior, se va colocando un libro cada vez. ¿En qué caja se depositará el último libro?

La suma de dos números enteros es 168; al dividirse el mayor entre el menor se obtiene 7 como cociente y 16 como residuo. ¿Cuáles son los números?

8. Un desagüe vacía un depósito de 1 m^3 a razón de 20 litros por minuto. ¿Cuántos desagües iguales al anterior se necesitan para vaciarlo en 10 minutos?

9. Dada la siguiente disposición numérica bajo las columnas A, B, C, D y E:

A	B	C	D	E
	2	3	4	5
6	7	8	9	
	10	11	12	13
14	15	16	17	
	18 …………….			

Averiguar en qué columna se hallará el número 641.

10. Diariamente llegan al aeropuerto un promedio de 6.480 pasajeros. Cada avión trae 90 pasajeros. ¿Cuál es el promedio de aviones que aterrizan cada hora en el aeropuerto?

Se ha dividido un número entre 5. ¿Cuántas veces el dividendo contiene al cociente?

¿Cuál es el divisor cuando el cociente contiene al dividendo 4 veces?

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las líneas que siguen.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

- La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

- Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

- Como complemento de lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales…- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

- En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la división.

1. ¿Qué es la división de números naturales?

De entrada, nos encontramos con una diferencia sustancial con respecto a las tres operaciones anteriores, adición, sustracción y multiplicación. En estos tres casos se trata de una operación aritmética según la cual, a cada par de números naturales se le hace corresponder otro número natural, su suma, su diferencia (si el primer número del par no es menor que el segundo) o su producto, respectivamente.

En el caso de la división de números naturales, no siempre a cada par de números (dividendo y divisor) se le puede hacer corresponder un solo número natural (cociente): esto sólo ocurre en la división exacta. En el caso más general, se le suele hacer corresponder otro par de números: el cociente y el residuo o resto de la división (Maza, 1991; Vergnaud, 1991). Así, por ejemplo, al par (38 , 7) se le hace corresponder el par (5 , 3); al par (41 , 2), el par (20 , 1); al par (15 , 23), el par (0 , 15); etc. Obsérvese que esta forma general incluye el caso de las divisiones exactas, de residuo 0: al par (24 , 6) se le hace corresponder el par (4 , 0).

Pero –aun con esta salvedad- la anterior sigue siendo una manera "formal" de decir las cosas que no nos aclara mucho, ya que debemos precisar cómo es que se divide, es decir, cómo es que se llega al par (5 , 3) partiendo de 38 y de 7.

Para ello vamos a referirnos a dos conjuntos, A y B, cuyos cardinales son 38 y 7, respectivamente. Como en el caso de la sustracción, construimos el conjunto A – B (complemento de B con respecto a A), que denotaremos A_1 y cuyo cardinal sería 38 – 7 = 31. Como el cardinal de A_1 sigue siendo mayor que el de B, construimos A_1 – B, que denotaremos A_2 y cuyo cardinal sería 31 – 7 = 24.

De este modo podemos obtener una secuencia de conjuntos A_i hasta llegar a un A_n cuyo cardinal sea menor que 7. En nuestro caso, la secuencia de tales cardinales continúa así: de

A_3, 17; de A_4, 10; y de A_5, 3. ¿Cómo interpretar estos valores finales? El subíndice 5 indica cuántas veces hemos procedido a obtener conjuntos "complementos de… con respecto a …". Este valor se identifica como el cociente de la división. Y el cardinal del último de tales conjuntos, 3, como el residuo o resto de la división.

Dos precisiones resultan evidentes en este proceso. En primer lugar, el conjunto B no puede ser vacío (su cardinal debe ser $\neq 0$), pues en caso contrario el proceso es irrealizable. Y en segundo lugar, el residuo de la división debe ser menor que el divisor, pues en caso contrario la secuencia de conjuntos complementarios quedaría incompleta.

El cociente de dos números naturales representa, pues, el número de veces que el cardinal de un conjunto B puede "restarse" del cardinal de un conjunto A y de la serie de diferencias sucesivas originadas por tales restas. Y el resto o residuo representa el cardinal del conjunto al que no puede "restarse" ya el cardinal del conjunto B.

Si denominamos:
D: cardinal del conjunto A (dividendo)
d: cardinal del conjunto B (divisor) ($d \neq 0$)
c: cociente
r: resto ($r < d$),

en la división de D entre d, al par (D , d) se le hace corresponder el par (c , r) de tal manera que:

$$\boxed{D = d \times c + r, \text{ con } d \neq 0, \; r < d}$$

Los signos habituales para la operación de dividir D entre d son:

$$D : d \qquad D/d \qquad D \div d$$

Como puede observarse, esta forma de conceptuar la división corresponde a su apreciación como *una resta reiterada*. Apreciación que, como se ve, tiene su fundamento en la descripción que acabamos de presentar. Sin embargo, existe otra referencia de la división como *operación inversa de la multiplicación*, que corresponde a la forma en que habitualmente suele presentarse por primera vez en el aula.

Esta segunda referencia debe manejarse con cierto cuidado. Es cierto que, por ejemplo, si en la multiplicación 4 x 6 = 24 ocultamos uno de los factores: 4 x ? = 24 y deseamos obtener su valor, procedemos a la división 24 : 4 = 6. Análogamente, la interrogante 24 : ? = 6 nos remite para su respuesta al conocimiento de la multiplicación 4 x 6 = 24. En este sentido, ambas operaciones "funcionan" como inversas una de la otra.

Pero si vamos al terreno de los conceptos, ya hemos visto que, en la multiplicación, a un par de números se le hace corresponder un número, mientras que en la división, se le hace corresponder otro par de números. Aquí no puede hablarse de inversión de operaciones en sentido estricto (Maza, 1991; Vergnaud, 1991).

¿Qué decir, entonces, de la doble consideración de la división como resta reiterada y como operación inversa de la multiplicación? Esto nos recuerda lo que ocurría en el caso de la multiplicación (Ver Cuaderno 5), cuando ésta podía considerarse como cardinal del conjunto producto de dos conjuntos o como suma reiterada: el primero de estos enfoques se consideraba *matemáticamente más formal* y el segundo, *pedagógicamente más apto*.

Análogamente, en el caso de la división, el enfoque de *resta reiterada* puede considerarse como *matemáticamente más formal* y el de *operación inversa de la multiplicación*, como *pedagógicamente más apto* para entrar en la división desde el terreno de la multiplicación.

Como vemos, la consideración formal de la división de números naturales requiere de ciertas precisiones teóricas que debemos conocer y comprender. Pero esta presentación formal no es, afortunadamente, la única respuesta a la pregunta acerca de qué es esta operación. Porque la división también puede ser vista como un *modelo de situaciones* de la vida diaria, o de situaciones lúdicas, o de otras áreas del saber. En este sentido, la división se convierte en una herramienta que nos permite interpretar matemáticamente las situaciones que se presentan en nuestra vida.

¿Y cuáles, o de qué naturaleza son estas situaciones para las que la división puede presentarse como modelo? He aquí algunas:

1. Situaciones de *repartir* una cantidad dada entre cierto número de receptores.
2. Situaciones de *restar reiteradamente*.
3. Situaciones de *comparar dos cantidades* con el fin de *averiguar cuántas veces una contiene a –o está contenida en- la otra*.
4. Situaciones de *hallar el valor de algún atributo* (medida, peso, costo…) *de una unidad*, conociendo el de un conjunto de unidades similares.
5. Situaciones de *obtener una cantidad que sea un cierto número de veces menor* que otra.
6. Situaciones de *averiguar el número de grupos* de determinado tamaño que se encuentran en un conjunto conocido.
7. Situaciones de *averiguar el tamaño de cada grupo*, cuando se sabe cuántos similares hay en un conjunto conocido.

Estas situaciones suelen venir caracterizadas –en la interpretación verbal que de ellas hace el sujeto- por verbos tales como repartir, hacerlo tantas veces menor, hallar la mitad o la enésima parte, averiguar cuántas veces algo es mayor o menor que otra cantidad, y los propios de cada situación particular.

En resumen, también hay dos formas de considerar la división: como un *modelo de situaciones de la vida diaria* y como un *objeto de estudio formal* dentro de la matemática.

No hay contradicción entre ambas formas de considerar la división, sino más bien complementariedad. Pero sí conviene resaltar que en el proceso de adquisición del concepto, de los procedimientos y de las destrezas propias de la operación, es preferible entrar por la vía del modelo de situaciones –y particularmente por las que hacen referencia a la perspectiva de operación en cierto modo inversa de la multiplicación- y considerar el estudio formal –con su lenguaje específico- como una meta a alcanzar posteriormente.

Finalizamos este primer apartado con dos reflexiones. La primera es similar a la que hacíamos en el caso de la sustracción (Ver Cuaderno 4). Allí decíamos que esa operación no es "interna" en el conjunto de los números naturales, es decir, que no siempre al restar dos de tales números se obtiene otro número natural. Y agregábamos que había que esperar al conjunto de los números enteros (positivos y negativos) para que la sustracción adquiriera el carácter de operación interna.

De manera análoga, la división de dos números no es "interna" en el conjunto de los números naturales; es decir, que no siempre al dividir dos de tales números se obtiene otro número natural solamente: esto ocurre nada más cuando la división es exacta. Hay que esperar a las fracciones para que la división adquiera el carácter de operación interna: al dividir dos fracciones –con tal de que la segunda sea diferente de 0- siempre se obtiene una fracción … y no hay resto.

La segunda reflexión se centra en las relaciones existentes entre las cuatro operaciones aritméticas básicas. Gráficamente podrían representarse así (con las salvedades hechas en su momento a la multiplicación como suma reiterada y a la división como inversa de la multiplicación):

Adición	← opuestas →	Sustracción
reiterada ↓		reiterada ↓
Multiplicación	← opuestas →	División

Esta visualización nos debe hacer pensar en la matemática como una ciencia en la que sus objetos –operaciones aritméticas en este caso- nunca están aislados, sino que mantienen relaciones entre ellos. Realmente, la matemática es una ciencia de objetos y de relaciones entre ellos. Esto nos lleva a las consideraciones que hacíamos en el Cuaderno 1, acerca de la importancia de no aislar las cosas, sino de buscar, comprender y saber utilizar las relaciones existentes entre ellas.

2. El desarrollo de destrezas para dividir

Atención:
Todo lo que se va a decir ahora no es sólo para entenderlo. Es, sobre todo, para practicarlo. Pero no un par de veces, y ya. La ejercitación frecuente y abundante es requisito indispensable para desarrollar destrezas de cálculo mental. Y esto es muy importante, porque si no las poseemos no podremos construirlas con nuestros alumnos.

2.1 Relaciones entre los cuatro términos de la división

En primer lugar, nos conviene afianzar los conceptos y las *relaciones existentes entre los cuatro términos que intervienen en la división*. Para ello intentaremos contestar a las siguientes preguntas (hágalo primero por su cuenta, antes de revisar las respuestas):

a) ¿Cómo se calcula el dividendo en una división exacta?
b) ¿Cómo se calcula el dividendo en una división inexacta?
c) ¿En qué casos el cociente es mayor que la unidad?
d) ¿En qué casos el cociente es menor que la unidad?

Ahora, en el caso de una división exacta:
e) Se ha dividido un número por 5. ¿Cuántas veces el dividendo contiene al cociente?
f) Si el cociente es 12, ¿cuántas veces contiene el dividendo al divisor?
g) ¿Cuál es el divisor cuando el dividendo contiene al cociente 10 veces?
h) ¿Cuál es el cociente cuando el dividendo contiene al divisor 25 veces?

He aquí las respuestas:

a) Multiplicando el divisor por el cociente
b) Multiplicando el divisor por el cociente y agregando el residuo
c) Cuando el dividendo es mayor que el divisor
d) Cuando el dividendo es menor que el divisor
e) 5 veces
f) 12 veces
g) 10
h) 25

2.2 Expresiones equivalentes

Hay otras consideraciones prácticas que se derivan de las relaciones presentes en las divisiones exactas. Por ejemplo, *expresiones equivalentes* tales como:

24/12 = 2 ↔ 24 es el doble de 12 ↔ 12 es la mitad de 24 ↔ 24 = 2 x 12 ↔
24/2 = 12 ↔ 24 + 12 es el triple de 12 ↔ 24 – 12 = 12 ↔ 24 x 12 = 2 x 12^2

Expresiones que se pueden generalizar al caso en que A : B = n. Así:

A/B = n ↔ A es n veces B ↔ B es la enésima parte de A ↔ A = n x B ↔
A/n = B ↔ A + B = (n + 1) veces B ↔ A – B = (n – 1) veces B ↔ A x B = n x B^2

Estas equivalencias nos permiten resolver rápidamente algunos problemas, como dos de los que se plantean al inicio del Cuaderno:

a) La diferencia de dos números naturales es 940 y el cociente exacto del mayor entre el menor es 11. ¿De qué números se trata?
b) La suma de dos números enteros es 168; al dividirse el mayor entre el menor se

obtiene 7 como cociente y 16 como residuo. ¿Cuáles son los números?

Veamos su resolución:

a) Sean D y d ambos números. Los datos son D : d = 11, D – d = 940. Ahora bien, si en una división el dividendo se sustituye por la diferencia entre el dividendo original menos el divisor, el cociente disminuye en una unidad (¿seguro?). Así, en nuestro caso, 940 : d = 10. Luego d = 940 : 10 = 94. Y como D es 11 veces mayor, D = 94 x 11 = 1.034.

b) Si llamamos D al número mayor y d al menor, podemos recoger los datos del problema así:

$$D + d = 168 \quad \text{y} \quad \begin{array}{r|l} D & \underline{\;d\;\;} \\ 16 & 7 \end{array} \;, \quad \text{de donde: } D = 7 \times d + 16$$

Si D fuera 16 unidades menor, por un lado la suma de este D y d sería también 16 unidades menor, es decir: 168 – 16 = 152, y por otro lado, la división sería exacta. Este último dato significa que el nuevo D sería un número 7 veces mayor que d, es decir, que "el nuevo D + d = 8 veces el valor de d" => 152 = 8 x d. Luego d = 152 : 8 = 19. De donde, el valor inicial de D es: D = 7 x 19 + 16 = 133 + 16 = 149.

2.3 Otras relaciones y regularidades

Aunque no contamos con propiedades similares a las de la adición y multiplicación (conmutativa, asociativa y disociativa), sí podemos establecer un cuerpo de *relaciones y regularidades* útiles. Veamos esto con más detalle.

En efecto, no podemos considerar la propiedad conmutativa en la división ya que 5 : 3 no es lo mismo que 3 : 5. Los únicos casos en que m : n es igual a n : m ocurren si n = m ≠ 0. También es cierto que no podemos hablar de la propiedad asociativa en el caso de la operación de división, y que el elemento neutro (el 1) sólo "funciona" por la derecha, es decir, que 5 : 1 = 5 (pero 1 : 5 ≠ 5). Sin embargo, hay otras propiedades de interés que pueden facilitarnos el desarrollo de destrezas para dividir. Destrezas que, como veíamos en las otras operaciones, son la base del cálculo mental aplicado a las divisiones.

Si reflexionamos sobre el funcionamiento de la división como inversa de la multiplicación y nos centramos en el significado de algunas tablas de multiplicar (Ver Cuaderno 5), podemos inferir también el significado de la división para el caso de algunos divisores particulares. Así, tenemos que (para entender mejor los casos que se proponen, la mayoría de los ejemplos se refieren a divisiones exactas):

1. Dividir entre 1 es *dejar intacto el dividendo*. Así, 47 : 1 = 47.

2. Como multiplicar por 10 significa agregar un 0 al otro factor, dividir entre 10 un número terminado en 0 se reduce a *eliminar ese 0 en el dividendo*. Así, 5.070 : 10 = 507 (después veremos su significado en el caso de los decimales).

3. Como los productos de la tabla de multiplicar por 2 son el doble de los correspondientes de la tabla del 1, dividir entre 2 significa *obtener la mitad del dividendo*. Así, 436 : 2 es la mitad de 436. La mitad de 400 es 200, la de 30 es 15, y la de 6 es 3. De donde: 436 : 2 = 200 + 15 + 3 = 218.

4. Los productos de la tabla de multiplicar por 4 son el doble de los correspondientes de la tabla del 2. Por consiguiente, dividir entre 4 significa *obtener dos veces consecutivas la mitad a partir del dividendo*. Así, 812 : 4 pasa por obtener la mitad de 812 –que es 406- y obtener ahora la mitad de este último número, con lo que se llega a 203.

5. Como los productos de la tabla del 8 son el doble de los correspondientes de la tabla de multiplicar por 4, dividir entre 8 significa *obtener tres veces consecutivas la mitad a partir del dividendo*. Así, 1.024 : 8 pasa por obtener la mitad de 1.024 –que es 512-, la mitad de 512 –que es 256-, y la mitad de este último número, que es 128.

6. Los productos de la tabla del 5 son la mitad de los correspondientes de la tabla del 10. Por consiguiente, dividir entre 5 un número acabado en 0 equivale a *eliminar ese 0 en el dividendo y luego obtener el doble de este último número*. Así, 630 : 5 equivale al doble de 63, que es 126.

De las consideraciones anteriores podemos inferir otras, de interés para el cálculo mental de multiplicaciones y divisiones:

1. Para multiplicar por otras potencias de 2 (16, 32, 64, etc.) basta obtener reiteradamente "el doble de" a partir del otro factor, tantas veces como lo indique el exponente de la potencia de 2; 4 veces para el factor 16 (2^4), 5 veces para el factor 32 (2^5), etc. Así, 23 x 32 = 736 (secuencia de 5 dobles a partir de 23: 46 → 92 → 184 → 368 → 736).

2. De manera inversa se procede para la división entre potencias de 2: ahora la secuencia será de "la mitad de" a partir del dividendo, tantas veces como lo indique el exponente de la potencia de 2. Así, 2.032 : 16 = 127 (ya que 16 = 2^4, se sigue una secuencia de 4 mitades a partir 1.016: 1.016 → 508 → 254 → 127).

3. Como 25 = 100/4, multiplicar un número por 25 equivale a agregarle dos ceros y obtener dos veces la mitad a partir de este resultado. Así, 25 x 18 = (100/4) x 18 = 1.800 : 4, que lleva a la secuencia de dos mitades: 900 → 450. De un modo análogo se procede con el factor 125 (125 = 1.000/8); así, 28 x 125 = 28.000 : 8, que lleva a la secuencia de tres mitades: 14.000 → 7.000 → 3.500.

4. De manera inversa se procede para la división entre potencias de 5 (25, 125, 625, etc). Así, dividir un número entre 25 equivale a dividirlo entre 100 (eliminar dos ceros a la derecha) y luego multiplicarlo por 4 (operar dos veces "el doble de"). Así, 6.500 : 25 = 6.500 : (100/4) = 65 x 4, que lleva a la secuencia de dobles 130 → 260.

En el caso en que el divisor no esté formado exclusivamente por potencias de 2 y de 5, sino que puede disociarse en estos y otros factores, la división puede irse transformando en sucesivas divisiones entre cada uno de esos factores. Así, para dividir 732 entre 12, como 12 = 2 x 2 x 3, podemos establecer una secuencia de divisiones equivalentes a la primera: 732 : 12 ↔ 366 : 6 ↔ 183 : 3 = 61. Esta secuencia puede llevarse mentalmente de esta manera: 732 entre 2 es su mitad, 366; 366 entre 2 es su mitad, 183; y 183 entre 3 es la tercera parte de 180 (que es 60) y de 3 (que es 1), es decir, 61. Lo que se busca es hacer más "ligeras" las cantidades que se dividen…

Pero en algunas oportunidades puede resultar útil el proceso inverso, es decir, multiplicar adecuadamente dividendo y divisor para facilitar la división. Así, por ejemplo, para dividir 73,5 entre 1,5, podemos multiplicar ambas cantidades por 2 y pasar a la división equivalente de 147 entre 3, más sencilla de resolver.

Otra propiedad que también es útil para el cálculo mental de las divisiones es la de la *distributividad con respecto a la adición y a la sustracción*. Es decir, al dividir una suma entre un número se obtiene el mismo resultado que si se suman los cocientes de cada sumando entre ese número. Y de manera análoga para la resta. Así, por ejemplo, (60 + 30) : 15 = 60 : 15 + 30 : 15 = 4 + 2 = 6 (que es el resultado de 90 : 15). Y también, (56 – 24) : 8 = 56 : 8 – 24 : 8 = 7 – 3 = 4.

Con referencia a la propiedad anterior, conviene no confundirla con una falsa distributividad. Es decir, la suma o la resta deben figurar en el dividendo, no en el divisor. Porque, por ejemplo, 60 : (15 + 5) es igual a 60 : 20, cuyo resultado es 3. Pero la aplicación de esta falsa distributividad nos llevaría a 60 : 15 + 60 : 5 = 4 + 12 = 16, resultado erróneo.

Finalmente, también podemos destacar otras *regularidades* que se presentan cuando se producen algunas transformaciones en las cantidades de los cuatro términos que intervienen en la división. Con el fin de detectar tales regularidades, intente resolver los ejercicios que se proponen a continuación. Luego podemos comparar sus respuestas con las que se exponen posteriormente.

a) ¿Qué le ocurre al cociente en una división exacta si:

1. el dividendo se multiplica por 7 y el divisor permanece igual?
2. el dividendo se divide entre 3 y el divisor permanece igual?
3. el dividendo permanece igual y el divisor se multiplica por 5?
4. el dividendo permanece igual y el divisor se divide entre 3?
5. el dividendo se multiplica por 3 y el divisor se divide entre 2?
6. el dividendo se multiplica por 6 y el divisor se multiplica por 3?
7. el dividendo se divide entre 2 y el divisor se divide entre 8?
8. el dividendo se divide entre 3 y el divisor se multiplica por 5?
9. se agrega al dividendo una cantidad igual al divisor?
10. se le resta al dividendo una cantidad igual al divisor?
11. el cociente y el divisor intercambian sus funciones?

b) ¿Qué modificaciones simultáneas pueden hacerse a las cantidades del dividendo y del divisor de una división exacta para que el cociente:

1. permanezca igual?
2. se duplique?
3. se reduzca a su tercera parte?

c) ¿Qué le puede haber ocurrido al dividendo de una división exacta si:

1. el divisor ha permanecido igual y el cociente se ha reducido a su mitad?
2. el divisor ha permanecido igual y el cociente se ha triplicado?
3. el divisor se ha duplicado y el cociente se ha cuadruplicado?
4. el divisor se ha reducido a su mitad y el cociente se ha sextuplicado?
5. el divisor se ha duplicado y el cociente se ha reducido a su mitad?
6. el divisor y el cociente se han reducido a su mitad?

d) ¿Qué le puede haber ocurrido al divisor de una división exacta si:

1. el dividendo ha permanecido igual y el cociente se ha reducido a su mitad?
2. el dividendo ha permanecido igual y el cociente se ha triplicado?
3. el dividendo se ha cuadruplicado y el cociente se ha duplicado?
4. el dividendo se ha reducido a su sexta parte y el cociente se ha duplicado?
5. el dividendo se ha duplicado y el cociente se ha reducido a su mitad?
6. el dividendo y el cociente se han reducido a su tercera parte?

e) Si en una división inexacta el dividendo se duplica y el divisor permanece igual, ¿qué le ocurre al cociente? ¿Y al residuo?

He aquí, brevemente, las respuestas:

a) 1. se multiplica por 7; **2**. se divide entre 3; **3**. se divide entre 5; **4**. se multiplica por 3; **5**. se multiplica por 6; **6**. se multiplica por 2; **7**. se multiplica por 4; **8.** se divide entre 15; **9.** aumenta en 1 unidad; **10.** disminuye en 1 unidad; **11.** es el anterior divisor.

b) 1. multiplicar o dividir ambos por la misma cantidad simultáneamente; **2**. que el divisor se multiplique por a ($a > 0$) y el dividendo por el doble de a; o que el dividendo permanezca igual y el divisor se reduzca a su mitad; o que el dividendo se divida entre a y el divisor entre el doble de a; **3**. que el dividendo se multiplique por a y el divisor por el triple de a; o que el divisor permanezca igual y el dividendo se reduzca a su tercera parte; o que el divisor se divida entre a y el dividendo entre el triple de a.

c) 1. se ha dividido entre 2; **2**. se ha multiplicado por 3; **3**. se ha multiplicado por 8; **4**. se ha multiplicado por 3; **5**. ha permanecido igual; **6**. se ha dividido entre 4.

d) 1. se ha multiplicado por 2; **2**. se ha dividido entre 3; **3**. se ha multiplicado por 2; **4**.se ha dividido entre 12; **5**. se ha multiplicado por 4; **6**. ha permanecido igual.

e) Resuelva varios casos y formule la conclusión pertinente…

Vamos a propiciar el desarrollo de nuestras destrezas con la división. Para ello, resuelva mentalmente los siguientes ejercicios:

864 : 8 170 : 5 356 : 4 272 : 16 38.000 : 100 3.500 : 25 432 : 24 315 : 15 216 : 18 6.010 : 10 484 : 2 1.010 : 5 606 : 6 49.049 : 7 120.120 : 120 12.423 : 123 792 : 8 162 : 18 294 : 3 Si 12.193 : 137 = 89, ¿cuál será el cociente de 24.386 : 137? Si 12.040 : 56 = 215, ¿cuál será el cociente de 6.020 : 14? Si 4.608 : 64 = 72, ¿cuál será el cociente de 1.536 : 128?

3. La división en el sistema de numeración decimal

Hasta ahora se han resuelto algunos ejercicios de división sobre la base del conocimiento de las tablas de multiplicar y de la utilización de las regularidades de la operación. Pero no todas las divisiones pueden realizarse con soltura por esta vía. Basta con tener grandes cantidades, o decimales, en el dividendo y en el divisor. En estos casos, procedemos basándonos en las mismas tablas y en las potencialidades del sistema de numeración decimal. Distinguimos dos casos: el de la división entera y el de la división con decimales.

División entera (exacta y no exacta)

Supongamos que tenemos que resolver la división 41.507 : 18. ¿Cómo llegar a construir y explicar el algoritmo habitual para esta división (u otra cualquiera)? Una vía sencilla es la que habitualmente hemos propuesto con materiales concretos, los billetes de denominación decimal.

En primer lugar, debemos “romper” el dividendo: 4 billetes de 10.000 (decenas de mil), 1 de 1.000 (unidades de mil), 5 de 100 (centenas) y 7 de 1 (unidades). Intentemos ahora “repartir” estas cantidades entre 18 sujetos, con la ayuda de nuestro desinteresado banco… Evidentemente, a ninguno de los 18 sujetos le “toca” un billete de 10.000, pues sólo hay 4 para repartir. Vamos al banco y cambiamos los 4 de 10.000 por 40 de mil que, unidos al que se tenía, nos da 41 billetes de mil. Ahora sí hay billetes que repartir; y ya sabemos algo de inmediato: el cociente está en el orden de las unidades de mil.

En el reparto podemos dar 2 rondas completas (36 billetes repartidos) y nos sobran 5 billetes de mil. En el banco los cambiamos por 50 de cien que, unidos a los 5 que se tenían, nos da 55 billetes de cien. Ahora podemos dar 3 rondas completas (54 billetes repartidos) y nos sobra 1 billete de cien. En el banco lo cambiamos por 10 de diez. No teníamos billetes de diez, de modo que intentamos repartir los 10 entre los 18 sujetos; misión imposible: nadie recibe un billete de diez. En el banco los cambiamos por 100 de uno que, unidos a los 7 que se tenían, nos da 107 billetes de uno. Finalmente podemos dar 5 rondas completas (90 billetes repartidos) y nos sobran 17 billetes de uno.

El cociente de la división está en las manos de cada uno de los 18 sujetos beneficiados con el reparto: 2 billetes de mil, 3 de cien, ninguno de diez y 5 de uno; es decir, 2.305. Y el residuo es 17. Como puede verse al proceder por esta vía del reparto (restas sucesivas), en principio no es necesario saber multiplicar para poder dividir. ¿Cuál es, pues, la utilidad del uso de las tablas de multiplicar? Abreviar el proceso de reparto. Por ejemplo, al repartir los 55 billetes de cien, el proceso se acorta si se sabe que 18 x 3 = 54: no son necesarias las rondas y de una vez se conoce que a cada sujeto le corresponden 3 de tales billetes y que queda uno de sobra.

A partir de estas consideraciones es posible construir y –sobre todo- entender el algoritmo habitual de la división. En una primera instancia, puede procederse a escribir los sustraendos que progresivamente se van restando del dividendo; escritura que, posteriormente, puede desaparecer para dar paso a los correspondientes cálculos mentales:

```
  4 1 5 0 7   |1 8____             ——→           4 1 5 0 7   |1 8____
– 3 6          2 3 0 5                             5 5        2 3 0 5
    5 5                                              1 0 7
  – 5 4                                                1 7
      1 0
    –   0
      1 0 7
    –   9 0
        1 7
```

Obsérvese que cuando el divisor es > 10, se presenta el problema de determinar cada cifra del cociente. Para solventar esta situación, puede construirse previamente la tabla de multiplicar del divisor (18 x 1 = 18; 18 x 2 = 36; … 18 x 9 = 162) y tenerla a la vista mientras se divide (Vergnaud, 1991), o bien proceder a estimar esas cifras y a precisarlas mediante un ejercicio de ensayo y ajuste, como habitualmente solemos hacer.

Este algoritmo es el más complejo de los correspondientes a las cuatro operaciones aritméticas básicas. Por eso presenta mayores dificultades para su aprendizaje. Razón de más para exigir su comprensión además del mero dominio mecánico. Por eso insistimos en que el recurso a los elementos concretos –reparto con los billetes de denominación decimal, proceso mediante el cual todos los números que van apareciendo en el desarrollo del algoritmo tienen su propio significado, empezando por la lectura del dividendo- debe estar siempre a la mano para dotar de significado al ejercicio de la división cada vez que el aprendiz experimente dificultades o cometa errores en su desarrollo.

División con decimales

En este apartado pueden presentarse diversas situaciones, tales como: 315,2 : 12; 126 : 35,04; 17 : 24; 33,2 : 156; 6,15 : 18,45; 0,14 : 0,049; 0,03 : 0,152; etc. Es decir, puede haber decimales en el dividendo, en el divisor, en ambos, o en ninguno; y simultáneamente, el divisor puede ser menor o mayor que el dividendo y, además, < 1 ó > 1.

Para clarificar esta complejidad tenemos que trabajar primero con la división de las diversas unidades –enteras y decimales- del sistema de numeración decimal. Así, por ejemplo, ¿qué significa el cociente de 0,1 : 100? Puede entenderse como "la centésima parte de una décima" (1 milésima). Y el de 1.000 : 10 como "la décima parte de una unidad de mil" (1 centena), así como el "número de veces que 10 está contenido en 1.000" (100). También el de 100 : 0,01 puede interpretarse análogamente. Pero el cociente de una división como 0,001 : 0,1 puede verse además como "la parte decimal del divisor que está contenida en el dividendo" (1 centésima).

Existe, pues, una variedad de interpretaciones para los casos de divisiones entre las unidades del sistema de numeración decimal, que podríamos resumir así:

Caso	Situación
1	El dividendo es mayor que el divisor y éste es > 1
2	El dividendo es mayor que el divisor y éste es < 1
3	El dividendo es menor que el divisor y éste es > 1
4	El dividendo es menor que el divisor y éste es < 1

Veamos algunos ejemplos de interpretación de estas situaciones:

Caso	División	Cociente	Interpretación de la división
1	1.000 : 100	10	1.000 contiene 10 veces a 100
			100 es la décima parte de mil
2	100 : 0,1	1.000	100 contiene 1.000 veces a 0,1
			0,1 es la milésima parte de 100
3	10 : 1.000	0,01	10 es la centésima parte de 1.000
			sólo la centésima parte de 1.000 está contenida en 10
4	0,001 : 0,01	0,1	0,001 es la décima parte de 0,01
			sólo la décima parte de 0,01 está contenida en 0,001

Interprete las divisiones siguientes:						
1.000 : 10	100 : 10	1 : 100	0,1 : 10	0,01 : 100	1 : 0,01	1.000 : 0,1
100 : 0,01	10 : 0,001	0,1 : 0,001	0,01 : 0,001	0,001 : 0,1	0,01 : 0,1	

También resulta de mucho interés establecer una equivalencia entre la "multiplicación por" y la "división entre", como se ilustra en la siguiente tabla:

Dividir entre	Multiplicar por	Ejemplos
1.000	0,001	35 : 1.000 ↔ 35 x 0,001 ↔ 35 (con 3 decimales) = 0,035
100	0,01	86,5 : 100 ↔ 86,5 x 0,01 ↔ 865 (con 3 decimales) = 0,865
1.000	0,001	0,2 : 1.000 ↔ 0,2 x 0,0001 ↔ 2 (con 5 dec.) = 0,00002
10	0,1	2,3 : 10 ↔ 2,3 x 0,1 ↔ 23 (con 2 decimales) = 0,23
100	0,01	3,39 : 100 ↔ 3,39 x 0,01 ↔ 339 (con 4 dec.) = 0,0339
0,01	100	64 : 0,01 ↔ 64 x 100 ↔ 6.400
0,001	1.000	0,079 : 0,001 ↔ 0,079 x 1.000 = 79

0,1	10	0,0041 : 0,1 ↔ 0,0041 x 10 = 0,041
0,001	1.000	0,35 : 0,001 ↔ 0,35 x 1.000 = 350
0,01	100	0,01 : 0,01 ↔ 0,01 x 100 = 1

Todas estas observaciones nos permiten responder a preguntas como las siguientes (intente resolverlas antes de revisar las respuestas):

a) ¿En qué caso el cociente es menor que el dividendo? ¿Y cuándo es mayor?
b) Se divide un número por 0,2. ¿Cuántas veces contiene el cociente al dividendo?
c) ¿Cuál es el divisor cuando el cociente contiene al dividendo 4 veces?

cuyas respuestas son: a) Si el divisor es >1 ó <1, respectivamente; b) 5 veces; c) 0,25.

Después de estos análisis básicos podemos afrontar la división entre cantidades decimales, con toda la variedad de casos que pueden presentarse, tal como lo apuntábamos antes. Habitualmente suelen darse varias reglas, correspondientes a esos diversos casos, según que los decimales estén presentes en el dividendo, en el divisor, en ambos o en ninguno. Vamos a analizar un solo caso –que no haya decimales en el divisor- y luego intentaremos reducir todos los demás a este solo.

Supongamos que se trata de efectuar la división 3.808,47 : 26. ¿Es posible utilizar aquí el recurso de los billetes de denominación decimal? Sí. Si se tratara de la división entera 3.808 : 26 llegaríamos por esa vía a tener como cociente 146 y como resto 12 unidades (verifíquelo). La situación prosigue de la misma manera: vamos al banco y cambiamos esos 12 billetes de 1 por 120 billetes de 0,1 que, unidos a los 4 que teníamos, nos dan 124 a repartir; podemos dar 4 rondas de reparto y nos sobran 20 billetes de 0,1. Vamos de nuevo al banco y cambiamos esos 20 billetes de 0,1 por 200 billetes de 0,01 que, unidos a los 7 que teníamos, nos dan 207 a repartir; podemos dar 7 rondas de reparto y nos sobran 25 billetes de 0,01. Y así podemos proseguir tantas veces como decimales se requieran en el cociente. Obsérvese que antes del 4 debe colocarse la coma en el cociente, no porque sea una regla, sino porque se trata de 4 décimas y esta identificación requiere de tal coma. El resultado de 3.808,47 : 26 es, finalmente, un cociente de 146,47 y 25 como resto.

Con el fin de intentar ahora la reducción de los demás casos al anterior, recordemos que *el cociente de una división no se altera si el dividendo y el divisor se multiplican o se dividen por la misma cantidad*. Así, por ejemplo, son equivalentes las siguientes divisiones: 28 : 4 ↔ 280 : 40 ↔ 280.000 : 40.000 ↔ 2,8 : 0,4 ↔ 0,0028 : 0,0004 ↔ 0,28 : 0,04 ↔ etc.

Esta propiedad nos permite transformar cualquier división en una equivalente, cuyo divisor no posea decimales:

315,2 : 0,23 (multiplicando ambos por 100) ↔ 31.520 : 23
0,63 : 1,5 (multiplicando ambos por 10) ↔ 6,3 : 15
86 : 0,725 (multiplicando ambos por 1.000) ↔ 86.000 : 725
0,0042 : 3,05 (multiplicando ambos por 100) ↔ 0,42 : 305

¿Y cómo darle significado a una división como 0,42 : 305? Veámoslo en esta tabla:

Situación parcial	Análisis	Acción en el cociente
0 unidades a repartir	No hay reparto posible	Se coloca un 0 en las unidades
4 décimas a repartir	No hay reparto posible	Se coloca un 0 en las décimas (y una coma previa, necesaria)
42 centésimas a repartir	No hay reparto posible	Se coloca un 0 en las centésimas
420 milésimas a repartir	Se reparte 1 milésima y sobran 115	Se coloca un 1 en las milésimas
1.150 diezmilésimas a repartir	Se reparten 3 y sobran 235 diezmilésimas	Se coloca un 3 en las diezmilésimas
etc.	etc.	etc.

Trate de "razonar" de este modo algunas divisiones que Ud. mismo(a) puede proponerse… Lo importante, como se ve, es darle significado a cada uno de los pasos de la operación y no tanto enseñar reglas mecánicas y memorísticas. Estas reglas deben aparecer más bien como un descubrimiento de los propios aprendices.

Finalizamos esta sección proponiéndole la resolución de los siguientes ejercicios, en los que debe escribir el elemento ausente de cada fila de la tabla:

Dividendo	Divisor	Cociente
157	?	1,57
14,328	143,28	?
0,000175	?	0,0175
?	0,00001	4,37
183	?	0,1
?	1.000	92,03
?	0,076	100
?	0,1	101
1,69	0,0169	?
0, 0345	10	?
2,38	?	100

4. Estimar el cociente de una división

Ya sabemos que esto significa *dar el resultado aproximado del cociente*. Decisión que se justifica porque a veces no es necesario el valor exacto de la operación, sino que resulta suficiente una aproximación adecuada a nuestros intereses o a la naturaleza del problema. Es de hacer notar que la estimación en el caso de la división resulta más sencilla que en el de las otras operaciones aritméticas, ya que en ella se procede de izquierda a derecha con las cifras del dividendo.

Para estimar el valor del cociente basta seguir el proceso indicado: "leer" el dividendo desglosado en unidades del sistema de numeración decimal y proceder con la idea de repartirlas entre tantos sujetos como indica la cantidad del divisor. Como hemos visto, inmediatamente aparece un dígito que nos indica en qué orden máximo de unidades se ubica el cociente, con lo que ya llegamos a una respuesta inicial razonable.

A veces resulta útil redondear los valores del dividendo y del divisor para facilitar ese cálculo inicial, pero hay que tener presente que tienen mayor repercusión en el resultado las variaciones que se aplican al divisor que las que se hacen en el dividendo. Hecha esta primera estimación, sólo es cuestión de ir afinando el valor obtenido.

Por ejemplo, si se desea estimar el cociente de 0,786 : 18,154 procedemos primero a transformar la división (multiplicando por 1.000) en 786 : 18.154 y vamos razonando: Con 786 unidades, no alcanza para una unidad; con 7.860 décimas, no alcanza para una décima; con 78.600 centésimas, sí alcanza para centésimas. Y para estimar cuántas, podemos redondear los términos a 80.000 : 20.000, lo que nos da un valor aproximado de 4 centésimas. Por consiguiente, el valor aproximado de la división es 0,04.

Estime mentalmente el cociente de las siguientes divisiones:

138,2 : 0,65	3,1416 : 18	0,059 : 37,2	763.156 : 328	3.178 : 0,51
61,02 : 975,9	0,035 : 0,48	0,0046 : 0,00074	0,0086 : 0,39	0,0101 : 2,1

5. Tengo ante mí una situación de división; y ahora, ¿qué hago?

1. *Observo la situación* y decido si necesito un resultado exacto, o me basta con una aproximación. En el segundo caso procedo por la vía de la estimación… y listo.
2. Si necesito un resultado exacto, *leo el dividendo* y *estimo el valor del cociente*, para tener desde el comienzo una idea razonable y aproximada del resultado.
3. *Decido la vía* que voy a utilizar para *realizar* la división: el cálculo mental o el algoritmo escrito habitual.
4. *Efectúo* la división por esa vía y llego al cociente (con los decimales solicitados, si es el caso) y al resto.
5. *Reviso el resultado* obtenido. Para validar su exactitud, puedo servirme de la calculadora (cociente x divisor + resto debe ser igual al dividendo). Además, aprovecho para *revisar la estimación inicial* y buscar la forma de afinarla.

Este proceso puede seguirse tanto si se trata de un ejercicio directo de división o de estimación –con lo cual el paso 1 queda decidido-, como si se trata de una situación problema que implique la división como modelo adecuado.

Lo que sí conviene destacar es que, dados el dividendo (D) y el divisor (d), no siempre es necesario escribirlos en la forma D |_d__ (con la galera) para realizar la operación en ese espacio. La operación puede realizarse con toda libertad por cualquiera de las vías propuestas, y algunas de ellas no necesitan recursos para escribir, sino una mente activa.

6. La resolución de problemas de división

Los "problemas de dividir" pueden adoptar la forma de situaciones de la vida diaria en las que la división aflora sin dificultad como la operación matemática que sirve de modelo oportuno. Otras veces, pueden presentar un carácter lúdico, o referirse a regularidades o características que presentan algunos números y series de números. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que volvemos a sugerir a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

a) ¿Cuál es la 987ª letra de la serie: A B C D E D C B A B C D E D C B A B C D …?

b) La suma de 101 números impares consecutivos es 12.827. ¿Cuál es el menor de tales números?

c) Si se escriben los números de 5 en 5 desde 0 hasta 1.000, ¿cuántas veces se escribe la cifra 5?

d) Se tienen 9 monedas entre las cuales hay una falsa que pesa un poco menos que las demás. Para averiguar cuál de las 9 es, se dispone de una balanza sin pesas y se dan sólo dos oportunidades para utilizarla. ¿Cómo hacemos?

e) Un kilo de naranjas tiene entre 6 y 8 naranjas. ¿Cuál es el mayor peso que pueden tener 6 docenas de naranjas?

f) La diferencia de dos números es 1.231; al dividirse el mayor entre el menor se obtiene 17 como cociente y 15 como residuo. ¿De qué números se trata?

g) Arturo acude a un restaurante con sus tres hijos, dos gemelos y una hija que es 2 años mayor que ellos. La ración de pollo cuesta 4.600 pesos para los adultos; los niños pagan 450 pesos por cada año de su edad. Después de comer, Arturo paga 16.300 pesos. ¿Cuáles son las edades de sus tres hijos?

h) Complete las casillas del siguiente cuadro:

4	+		:		= 3
x	■	+	■	x	■
	+		:		= 5
:	■	:	■	x	■
	+		+		= 7
= 6	■	=3	■	= 8	■

i) Una persona debe a dos comerciantes la misma cantidad de dinero. Al primero le paga con 18 kg de mercancía más 8.000 pesos. Al segundo le da 25 kg de la misma mercancía y recibe como devolución 45.200 pesos. ¿Cuánto debía, en pesos, a cada uno de los comerciantes?

j) En la pantalla de una computadora aparece un número; se dispone de dos teclas: pulsando la A, se restan dos unidades al número en pantalla; pulsando la B, se divide entre dos el número en pantalla. El juego consiste en pulsar adecuadamente las teclas A y

B para llegar a 0 desde el número inicial.
a. Muestre una secuencia de pulsaciones de A y B para llegar a 0 desde 32
b. Ídem, desde 50
c. ¿Para qué tipo de números no es posible construir ninguna secuencia "exitosa"?
d. Si la secuencia exitosa es B B B A A A, ¿de qué número se trata?

Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) Primero, como siempre, hay que fijarse bien en la secuencia propuesta. Empieza en A, avanza hasta E y retrocede de nuevo hacia A. Hay una secuencia básica que se repite: A B C D E D C B y que consta de 8 términos. Es decir, cada 8 letras estamos empezando de nuevo. Nuestro problema consiste en saber cuántas (cociente) de estas secuencias básicas de 8 (divisor) letras "caben" completas en 987 (dividendo) y, sobre todo, cuántas letras sobran (residuo), para poder identificar de cuál se trata dentro de la secuencia básica.

Estamos en presencia de una división, de la que nos interesa el residuo:

$$\begin{array}{r|l} 987 & \underline{8\quad} \\ 3 & 123 \end{array}$$

Esto significa que hay 123 secuencias básicas completas más tres letras: la tercera de la secuencia básica es C. Por consiguiente, la letra que ocupa la posición 987ª es la C.

b) Para abordar este problema debemos formarnos cierta idea de lo que significa una suma de 101 números impares consecutivos. Supongamos que formamos una empezando con 1: 1 + 3 + 5 + 7 + … Nos interesa conocer quién sería el último sumando. Obsérvese que el primero es 1, el undécimo es 21 (verifíquelo), el vigésimo primero es 41 (verifíquelo), con lo que ya se puede inferir que el 101º sumando es 201.

La suma sería, entonces: 1 + 3 + 5 + … + 197 + 199 + 201. ¿Cómo sumar todo esto rápidamente? Si nos fijamos y sabemos utilizar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, podemos agrupar así los sumandos: (1 + 201) + (3 + 199) + (5 + 197) + … + (97 + 105) + (99 + 103) + 101. Hay 50 parejas, cada una de las cuales suma 202, más el sumando 101. Por consiguiente, la suma total es 50 x 202 + 101 = 10.100 + 101 = 10.201.

Ya sabemos cómo se suma, pero no hemos llegado al total requerido: 12.827. Por consiguiente, la serie de impares no debe empezar en 1, sino algo más adelante. ¿Cómo averiguar cuál es ese primer término? Si, por ejemplo, empezáramos la serie en 3, la terminaríamos en 203. Con este cambio, eliminamos el 1 e introducimos el 203: la nueva suma habrá ganado: 203 – 1 = 202 unidades. Y esto será así cada vez que "corramos" un lugar a la derecha el inicio de la serie.

Lo que nos interesa saber, entonces, es cuántas veces tenemos que hacer esa "corrida" que produce cada vez un aumento de 202 en la suma, con el fin de "llenar" la diferencia existente, 12.827 – 10.201 = 2.626. Se trata de hallar el cociente de 2.626 : 202, que es

13. La serie de los 101 números impares empieza 13 lugares después del 1, en 27 y termina en 227.

c) En todos los problemas en los que se pide contar algo, la clave está en llevar ese conteo con orden. Una forma de hacerlo puede ser la de contar cuántas veces aparece en la posición de las unidades, otro tanto en la de las decenas y en la de las centenas.

Para averiguar cuántas veces aparece en la posición de las unidades, veamos qué sucede en el intervalo de 0 a 100. Una observación adecuada nos indica que aparece 10 veces (5, 15, 25, …, 95). Por consiguiente, de 0 a 1.000 aparece 10 x 10 = 100 veces. De forma análoga se procede para averiguar cuántas veces aparece en la posición de las decenas: en el intervalo de 0 a 100 aparece 10 veces (50, 51, …, 59). Por consiguiente, de 0 a 1.000 aparece 10 x 10 = 100 veces. Y para el caso de las centenas, en el intervalo de 0 a 1000 aparece 100 veces (500, 501, …, 599). Por consiguiente, de 0 a 1.000 la cifra 5 aparece 100 x 3 = 300 veces.

d) De entrada pudiera pensarse en separar las monedas en tres grupos, de 1, 4 y 4 respectivamente, poner cada grupo de 4 en cada platillo de la balanza y observar: si la balanza se equilibra, la moneda menos pesada es la que se separó; pero si la balanza se desequilibra para un lado, sabremos en qué grupo está y habría que seguir el proceso con esas 4 monedas, dividiéndolas a su vez en dos grupos de 2. Pero este proceso puede llevarnos a tres pesadas. Este no es un camino seguro.

Nos queda la alternativa de separar las 9 monedas en otros tres grupos, de 3 monedas cada uno, poner dos de esos grupos de 3, uno en cada platillo de la balanza, y observar: si la balanza se equilibra, la moneda menos pesada está en el grupo que se separó; pero si la balanza se desequilibra para un lado, sabremos en qué grupo de 3 está. De cualquier forma, después de este paso sabremos el grupo de 3 monedas en el que se encuentra la menos pesada. Y en la siguiente pesada (formando previamente tres grupos de una moneda cada uno) y con un análisis similar al anterior, se llega al objetivo propuesto.

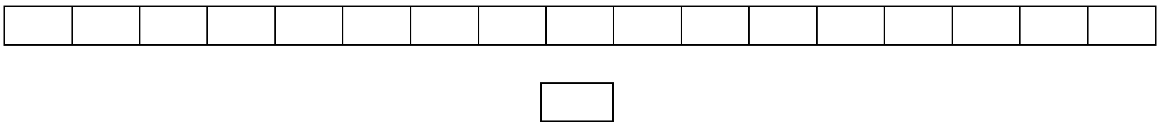
e) Seis docenas de naranjas contienen 72 naranjas. Si todas son de las más pesadas, habrá 6 por cada kilo. En este caso –que es el que nos interesa- las 6 docenas pesarán 72 : 6 = 12 kilos.

f) Si llamamos D (dividendo) al número mayor y d (divisor) al menor, podemos recoger los datos del problema así:

$$\begin{array}{r|l} D & \underline{\;d\;\;} \\ 15 & 17 \end{array} \qquad \text{de donde: } D = 17 \times d + 15$$

Si D fuera 15 unidades menor, por un lado la diferencia entre D y d sería también 15 unidades menor, es decir: 1.231 – 15 = 1.216, y por otro lado, la división sería exacta. Este último dato significa que el nuevo D sería un número 17 veces mayor que d.

Como ya sabemos, si el nuevo D es 17 veces mayor que d, entonces la diferencia entre ambos es, justamente, igual a 16 veces d. Pero veámoslo gráficamente (el nuevo D aparece en la 1ª fila y d en la 2ª):



Entonces, si la diferencia 1.216 se “reparte” equitativamente entre esos 16 cuadritos tendremos para cada uno de ellos: 1.216 : 16 = 76. Luego el número menor (d) es 76. Y el mayor (D) es 76 x 17 + 15 = 1.307

g) Los tres hijos pagan: 16.300 – 4.600 = 11.700 pesos. Si dividimos esta cantidad por 450 obtendremos el total de años por los que se está pagando: 11.700 : 450 = 26. La suma de las edades de los tres hijos es 26 años. Si la hija mayor tuviera 2 años menos, esa suma sería de 24 años y equivaldría a tres veces la edad de los gemelos. Por consiguiente, la edad de éstos es 8 años, y la de la hija mayor, 10.

h) Ya sabemos que este tipo de ejercicios requiere grandes dosis de observación y

4	+		:		= 3
x	■	+	■	x	■
	+		:		= 5
:	■	:	■	x	■
	+		+		= 7
= 6	■	=3	■	= 8	■

ensayo. Aquí la guía inicial está en la primera fila y en la primera columna. En la primera fila puede haber varias alternativas: 4 + 2 : 2; 4 + 5 : 3 (esta opción se desecha, ya que el producto de los tres factores de la tercera columna es 8); etc. Análogamente, en la primera columna: 4 x 3 : 2; 4 x 6 : 4; etc. Y a partir de cada selección, ensayar valores para los cuatro espacios restantes. El resultado final es:

4	+	2	:	2	= 3
x	■	+	■	x	■
3	+	7	:	2	= 5
:	■	:	■	x	■
2	+	3	+	2	= 7
= 6	■	=3	■	= 8	■

i) Evidentemente, para calcular el monto de la deuda en pesos, necesitamos saber el costo de un kilo de la mercancía que entra en la transacción. Para ello utilizamos la igualdad de los dos pagos. Así, 18 kg más 8.000 pesos equivalen a 25 kg menos 45.200 pesos.

De esa igualdad se desprende que 25 kg de la mercancía equivalen, a su vez, a 18 kg, más 8.000 pesos, más 45.200 pesos; es decir, 18 kg más 53.200 pesos. Hay una nueva deducción: los 7 kg de exceso del primer pago se compensan con los 53.200 pesos del segundo pago. Esto significa que cada kilo de mercancía vale: 53.200 : 7 = 7.600 pesos. De aquí se sigue que lo pagado a cada acreedor es: 18 x 7.600 + 8.000 = 144.800 pesos. Respuesta a la que se puede llegar también así: 25 x 7.600 – 45.200.

j) a. Para llegar de 32 a 0 podemos aplicar 16 veces seguidas la tecla A. Pero también podemos pulsar la tecla B y, al final, la tecla A:

(32)—B→(16)—B→(8)—B→(4)—B→(2)—A→(0)

b. Hay varios caminos posibles. Por ejemplo, aplicar 25 veces la tecla A. También puede ser llegar hasta 32 aplicando la tecla A y agregar después la secuencia anterior. O esta otra, quizá más breve:

(50)—A→(48)—B→(24)—B→(12)—B→(6)—A→(4)—B→(2)—A→(0)

c. Está claro que para los números impares no existe ninguna secuencia que lleve a 0. Y también, que cualquier secuencia para los pares no puede terminar con la tecla B.

d. Se trata de reconstruir la secuencia de números provocada por B B B A A A:

(0)—A→(2)—A→(4)—A→(6)—B→(12)—B→(24)—B→(48)

7. La resolución de problemas que involucran las cuatro operaciones aritméticas

Para cerrar de momento el ciclo de las cuatro operaciones aritméticas básicas proponemos a nuestros lectores la resolución de los siguientes problemas. De nuevo les sugerimos que, una vez leído cada enunciado, intenten resolverlo por cuenta propia antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

k) La edad de una persona al morir era casualmente el cociente de dividir su año de nacimiento entre 31. ¿Qué edad tenía esta persona en el año 1921?

l) A y B son dos números escogidos entre 1 y 45, ambos inclusive, tales que su suma es 45. ¿Cuál es el mayor valor posible de la expresión A x B : (A – B)?

m) Acabo de perder el tren por un minuto. Pero si pasaran 3 trenes más cada hora tendría que esperar al próximo tren 1 minuto menos que lo que tengo que esperar ahora. Y a todo esto, ¿cuánto es lo que tengo que esperar ahora?

n) Todos los números naturales desde 8 hasta 2.004 se dividen entre 7. ¿Cuánto da la suma de los residuos de todas esas divisiones?

ñ) Tenemos una gran hoja de papel cebolla, de 0,05 mm de espesor. Esta hoja se divide en dos mitades iguales que se colocan una encima de la otra. Este "bulto" se corta a su vez en dos mitades iguales que vuelven a colocarse una encima de la otra. Suponga que la operación se prosigue de manera similar hasta llegar a 15 veces desde el primer corte. ¿Cuál será el espesor del “bulto” que se obtendrá al final?

o) En el lugar de las ? coloque cualquiera de los cuatro signos de las operaciones aritméticas de tal forma que se cumpla la igualdad propuesta en cada caso:

170 ? 17 ? 12 + 120 ? 97 = 143 25 ? 40 ? 125 + 255 ? 63 = 200

p) Un tanque de agua tiene dos grifos. El primero lo llena en 10 minutos, y el segundo en media hora. ¿En cuánto tiempo se llenará si se abren los dos grifos a la vez?

q) Debía multiplicar 78 por un número de dos cifras, cuya cifra de las decenas es el triple de la de las unidades. Pero me equivoqué y multipliqué 78 por el número con las dos cifras cambiadas de posición. El producto obtenido así es 2.808 unidades menor que el que debería haberse obtenido. ¿Cuál era este producto?

r) Un comerciante compra 12 cajas de mercancía a 87 pesos cada una y vende 4 de ellas por un total de 380 pesos. ¿A cómo tendrá que vender cada una de las cajas restantes para que pueda obtener una ganancia de 156 pesos por la venta de las 12 cajas?

s) Divida 45 en cuatro sumandos tales que si al 1º le agrega 2, al 2º le resta 2, al 3º lo multiplica por 2, al 4º lo divide entre 2, y vuelve a sumar estos cuatro nuevos números, obtiene otra vez 45.

t) Nueve cuadernos importados cuestan 11 dólares y algunos centavos; 13 cuadernos similares cuestan 15 dólares y algunos centavos. ¿Cuál es el valor, en dólares, de cada cuaderno?

u) Escriba los números pares hasta el 12 utilizando cada vez 4 cuatros y sirviéndose de los signos de las operaciones aritméticas, incluida la potencia (Vale escribir dos dígitos juntos para constituir un solo número de dos dígitos).

Una vez más, vamos a presentar algunas vías de solución con el fin de contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

k) De acuerdo con el enunciado, el número del año en que nace nuestro sujeto debe ser un múltiplo de 31 menor que 1921. Al dividirse 1921 entre 31 se obtiene 61,97. Esto nos sugiere multiplicar 31 por factores menores que 62 para obtener los posibles años de nacimiento: 31 x 61 = 1891; 31 x 60 = 1860; 31 x 59 = 1829; no hay más casos verosímiles.

Si queremos saber el año de su muerte sumaremos cada factor variable a su correspondiente año de nacimiento. Así, tendríamos tres alternativas: 1891 + 61 = 1952; 1860 + 60 = 1920; 1829 + 59 = 1888. Como se ve, deben rechazarse los dos últimos casos, pues en ellos el sujeto no llega a estar vivo en el año 1921. Por consiguiente, nació en 1891 y en 1921 tenía 30 años.

l) Para que la expresión A x B : (A – B) tenga el mayor valor posible, nos interesa que el divisor sea lo más pequeño posible. Esto ocurre si A es una unidad mayor que B. Pero si, además, ambos deben sumar 45, la única alternativa viable es A = 23 y B = 22. El valor buscado es 23 x 22 : (23 – 22) = 23 x 22 = 506.

m) Podemos proceder por ensayo y ajuste, y así entender mejor el enunciado del problema. Supongamos que pasan 6 trenes cada hora, es decir, cada 10 minutos (60 : 6 = 10). En este caso, al agregar 3 trenes tendríamos 9 en servicio, que pasarían cada (60 : 9 = 6,67) 6 minutos y 40 segundos. La reducción del tiempo entre cada paso de dos trenes consecutivos es de: 10 m – (6 m y 40 s) = 3 m y 20 s. Pero esta reducción debe ser de 1 minuto, lo que nos lleva a rechazar nuestro valor inicial y a suponer que deben pasar más de 6 trenes cada hora.

El ensayo puede llevarse a otros valores (7, 8, 9, etc., trenes cada hora). La idea es que el número de trenes sea divisor de 60 (minutos de una hora) y que al agregar 3 a ese número, también se obtenga otro divisor de 60. Esta situación se presenta con el número 12. Efectivamente, si pasan 12 trenes cada hora, lo hacen cada (60 : 12 = 5) 5 minutos. Si se agregan 3 trenes al servicio, los 15 resultantes pasarían cada (60 : 15 = 4) 4 minutos, con lo que la espera se reduciría en 1 minuto. Como perdí el tren por 1 minuto, tengo que esperar 4 para montarme en el siguiente.

n) A partir de 8 hasta 14, los restos de dividir estos números entre 7 son, respectivamente, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 0; y su suma, 21. Lo que nos interesa es saber cuántos grupos similares de 7 números hay desde 8 hasta 2.004. Para ello buscamos primero cuántos números hay entre los dos dados, incluyéndolos a ambos: 2.004 – 8 + 1 = 1.997 números.

Al dividir esta cantidad entre 7 obtenemos como cociente 285 y como resto 2. Esto significa que hay 285 grupos completos de los 7 restos cuya suma es 21, y dos números cuyos restos son 1 y 2. La suma total de los residuos es, pues: 285 x 21 + 1 + 2 = 5.988.

ñ) En la siguiente tabla presentamos la información de lo que ocurre:

Operación	Pliegos de entrada	Pliegos de salida
1ª	1	$2 = 2^1$
2ª	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$
3ª	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$
4ª	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$
…	…	…
15ª	2^{14}	2^{15}

Por consiguiente, al final del proceso el “bulto” tendrá un espesor de 2^{15} x 0,08 mm = $(2^5)^3$ x 0,08 mm = 32^3 x 0,08 = 32.768 x 0,08 mm = 2.621,44 mm = 2,62144 m. Es decir, aproximadamente la altura de una habitación.

o) En la primera expresión, 170 ? 17 ? 12 + 120 ? 97 = 143, el comienzo sugiere el signo :

para el primer ?. Esto nos daría un cociente de 10, que debería multiplicarse por 12 para incrementar el resultado. Llegados a 120 y sumando 120 obtenemos 240, a lo que hay que restar 97 para terminar en 143. Así tenemos 170 : 17 x 12 + 120 – 97 = 143.

En la segunda expresión, 25 ? 40 ? 125 + 255 ? 63 = 200, la presencia del sumando 255, cercano al resultado final 200, sugiere que el aporte de las tres primeras cantidades debe ser pequeño. Una forma de lograr esto es multiplicar 25 por 40 y dividir el producto entre 125: el resultado es 8. El último ? debe ser el signo –. Así, 25 x 40 : 125 + 255 – 63 = 200.

p) Llamemos a los dos grifos A y B. Una forma de buscar la solución es plantearnos qué lograrían los dos grifos durante un determinado lapso de tiempo, por ejemplo, durante una hora: el grifo A llenaría (60 : 10 = 6) 6 tanques iguales al dado y el grifo B, (60 : 30 = 2) 2 tanques. Así, pues, si operan los dos juntos, llenarían 8 tanques en una hora. Por consiguiente, para llenar uno solo tardarán 60 : 8 = 7,5 minutos, es decir, 7 minutos y 30 segundos. Hay otras formas de resolver este problema...

q) El factor desconocido sólo puede ser uno de éstos: 31, 62 ó 96. El factor equivocado podría ser, respectivamente, 13, 26 ó 69. La diferencia entre los productos verdadero y equivocado (2.808) debe venir de alguna de estas tres multiplicaciones:

$$78 \times 31 - 78 \times 13 = 78 \times (31 - 13) = 78 \times 18$$
$$78 \times 62 - 78 \times 26 = 78 \times (62 - 26) = 78 \times 36$$
$$78 \times 96 - 78 \times 69 = 78 \times (96 - 69) = 78 \times 27$$

Los factores correctos son los de la segunda alternativa: 78 x 36 = 2.808. Por consiguiente, el producto que debería haberse obtenido es 78 x 62 = 4.836.

r) Veamos primero cuál fue el costo de las 12 cajas: 12 x 87 = 1.044 pesos. Si quiere tener 156 pesos de ganancia, la venta deberá ascender a 1.044 + 156 = 1.200 pesos. Como ya ha obtenido 380 pesos por la venta de 4 cajas, la venta de las otras 8 deberá alcanzar el monto de 1.200 – 380 = 820 pesos. Para ello, cada una de estas cajas deberá venderse a 820 : 8 = 102,50 pesos.

s) Llamemos A, B, C y D a los sumandos ordenados del 1º al 4º y observemos bien el enunciado. Si a A se le suman 2 y a B se le restan 2, ambos números cambiarán, pero no su suma, que sigue siendo la de antes (verifíquelo con cualquier ejemplo). Y como lo que nos interesa es que la suma se mantenga en 45, en principio A y B no nos "molestan" mucho. Incluso, pueden tener más de un valor cada uno.

¿Qué pasa con C y D? D debe ser par, para poder proporcionar una mitad entera. Además, una forma de que ambos números tampoco nos "molesten" para conservar la suma, es que D sea el doble C. Así, en la transformación, C se convertirá en su doble (D) y D en su mitad (C), y la suma de ambos números seguirá siendo la misma (verifíquelo con cualquier ejemplo).

De modo que hay muchas respuestas, siempre que C y D mantengan la relación sugerida. Por ejemplo: 13 + 5 + 9 + 18 pasa a ser: 15 + 3 + 18 + 9; 3 + 6 + 12 + 24 pasa a ser: 5 + 4 + 24 + 12; etc.

t) Si los 9 cuadernos costaran 11 dólares exactos, cada uno de ellos valdría 11 : 9 = 1,22 dólares. Análogamente, si los 13 cuadernos costaran 15 dólares exactos, cada uno de ellos valdría 15 : 13 = 1,15 dólares. Pero como cuestan algunos centavos más que las cantidades exactas, debemos inferir que cada cuaderno cuesta algo más que estos dos precios unitarios, es decir, algo más que 1,22 dólares.

Ensayemos con 1,23. Los 9 cuadernos costarían 9 x 1,23 = 11,07 dólares; los otros 13 costarían 13 x 1,23 = 15,99 dólares. Esta es una respuesta posible y, además, la única, ya que si se pasa al precio unitario de 1,24 dólares, el lote de 13 pasaría de los 16 dólares (13 x 1,24 = 16,12).

u) He aquí algunas de las respuestas posibles:

0 = 4 + 4 – 4 – 4; (4 x 4) – (4 x 4); (4 x 4)/4 – 4; 4 x 4 x (4 – 4)
2 = 4/4 + 4/4; (4 x 4)/(4 + 4); 4 – (4 + 4)/4
4 = 4 x 4^{4-4}; 4 + (4 – 4)/4; 4 + 4 x (4 – 4)
6 = 4 + (4 + 4)/4
8 = 4 x (4 + 4)/4; 4/4 x (4 + 4); $(4 + 4)^{4/4}$; 4 + 4 + 4 – 4
10 = (44 – 4)/4
12 = (44 + 4)/4; 4 x (4 – 4/4)

Terminamos esta parte dedicada a los problemas que involucran las operaciones aritméticas reiterando la reflexión que, sobre la forma en que los hemos abordado y resuelto, hicimos en los Cuadernos anteriores. He aquí algunas conclusiones, que seguramente compartimos:

1. El método de *tanteo razonado* (ensayo y ajuste) sigue mostrándose como muy eficiente. Como decíamos, es un método científico excelente, que nos acostumbra a formular hipótesis razonables –ajustadas a las condiciones de la situación- y a verificarlas en la práctica. Todo esto refleja un proceso permanente de toma de decisiones, así como de control sobre la propia actividad.

2. La valoración del método de tanteo razonado no debe excluir la consideración y práctica de *otros métodos* a la hora de resolver problemas. Por ejemplo, algunos de los problemas que acaban de trabajarse podían haberse planteado y resuelto por la vía algebraica, es decir, utilizando incógnitas y ecuaciones.

3. Nunca insistiremos demasiado acerca del valor de la *observación*: observar el enunciado de la situación, las condiciones que afectan a las variables o a los datos numéricos, los casos posibles, las hipótesis que formulamos, los resultados parciales que vamos obteniendo…

4. Otro punto a destacar es la presencia de ciertas *herramientas* auxiliares que facilitan la consideración de los datos del problema o de los que se van obteniendo durante su resolución: nos referimos al uso de *tablas*, *gráficas*, etc.

8. La división en el aula

No pretendemos dar una prescripción didáctica relativa a cómo desarrollar la enseñanza de la división, sino tan sólo destacar algunos puntos que nos parecen de mayor interés:

- Al trabajar con la división debe buscarse también la consolidación de los aprendizajes de la multiplicación, ya que ambas operaciones son como los dos polos de la estructura multiplicativa que debe construir el aprendiz.
- Hay que destacar el carácter conceptual de la división como resta reiterada y como inversa de la multiplicación. Como se ha visto, hay ejercicios y problemas adecuados a este fin.
- A destacar también la importancia de la adquisición y desarrollo de destrezas sobre la base de la observación de las regularidades presentes en la división.
- Es fundamental la comprensión de los cocientes de las diversas unidades, enteras y decimales, del sistema de numeración decimal.
- Se debe reforzar el sentido del algoritmo de la división. Esto puede lograrse mediante el recurso al proceso de reparto de billetes de denominación decimal.
- El desarrollo del cálculo mental y de la resolución de problemas debe figurar como una actividad permanente.
- No debe insistirse en la resolución de divisiones con cantidades de muchas cifras enteras o decimales. En estos casos puede estimarse el cociente y utilizar la calculadora para validar el resultado.

9. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"…

11. Un tren de kilómetro y medio de longitud viaja a una velocidad de 30 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en atravesar un túnel de kilómetro y medio de largo?

12. La señora Antonia compró un lote de caramelos a razón de 270 pesos por cada 9 caramelos y los vendió a razón de 10 caramelos por 800 pesos. Al venderlos todos obtiene una ganancia de 21.000 pesos. ¿Cuántos caramelos compró?

13. Una prueba comienza a las 8:25 a.m. y debe terminar a las 9:55 a.m. Si ha transcurrido la quinta parte del lapso previsto, ¿qué hora es?

14. En una ferretería, **1** cuesta 2.500 pesos y **918** cuesta 7.500 pesos. ¿Qué se está comprando?

15. Una persona ha vivido hasta ahora 44 años, 44 meses, 44 semanas, 44 días y 44 horas. ¿Cuántos años y meses cumplidos tiene?

16. María compra tres piezas de la misma tela, en distintos momentos pero al mismo precio. El costo de la primera pieza fue de 31,05 pesos; la segunda, que tenía 5 metros más que la primera, costó 36,80 pesos; y la tercera, 85,10 pesos. ¿Cuántos metros de tela ha comprado en total?

17. Si en cada autobús caben 40 estudiantes, ¿cuántos autobuses se necesitarán para transportar simultáneamente a los 736 alumnos de la escuela?

En un juego de billar hay 27 bolas, 26 de las cuales son de igual peso y una es más pesada. Si se dispone de una balanza sin pesas, explique cómo determinaría esa última bola con sólo tres pesadas en la balanza.

18. ¿En qué columna de la siguiente distribución numérica estará el número 2.305?

A	B	C	D	E	F	G
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14 ……………………………						

19. Complete las casillas del siguiente cuadro:

	x		-		= 9
:	■	+	■	-	■
	+		:		= 3
+	■	-	■	+	■
	x		:		= 6
= 7	■	=4	■	= 9	■

20. Un número de 6 dígitos empieza (por la izquierda) por 1. Si este dígito se quita de su lugar y se lleva a la posición de las unidades, el número que se obtiene es el triple del número original. ¿Cuál es este número?

21. La edad de Juan es el cuádruplo de la de René y dentro de 10 años será el triple. ¿Cuántos años tiene Juan ahora?

22. Se puede observar que 1.996 = 4 x 499. ¿Cuáles de los siguientes números:

1.908   1.952   2.299   2.500

pueden obtenerse mediante un producto de dos números de la forma a x abb?

23. Hallar el número cuyo quíntuplo disminuido en 17 es igual a su triple aumentado en 41

24. Un grupo de estudiantes, entre los que hay 4 chicas, está merendando. El costo total de la merienda es de 12.000 pesos y todos consumen lo mismo. Si las chicas no pagan, los chicos deben pagar 500 pesos más cada uno. ¿Cuántos estudiantes están merendando?

25. Observe las siguientes expresiones:

$2 + 2 = 5 \qquad 8 - 7 = 0 \qquad 4 \times 4 = 24 \qquad 7 : 1 = 3 \qquad 1^3 = 15$

Ninguna de ellas es correcta, pero si a todos los números implicados se les aplica la misma transformación aritmética, todas las expresiones se tornarán correctas. ¿De qué transformación se trata?

26. Un campesino sembró 34 hileras de maíz, con 15 huecos en cada hilera y 3 semillas en cada hueco. Si sólo germina la mitad de las semillas sembradas, ¿cuántas plantas de maíz obtiene?

27. ¿Por qué número hay que multiplicar 76 para obtener un producto de 4 dígitos que acabe también en 76?

28. ¿En qué caso el producto de dos factores positivos es, a la vez, mayor que uno de los factores y menor que el otro?

29. Escriba los números impares hasta el 9 utilizando cada vez 4 cuatros y sirviéndose de los signos de las operaciones aritméticas, incluida la potencia (Vale escribir dos dígitos juntos para constituir un solo número de dos dígitos).

30. Un perro persigue a un conejo que le lleva una ventaja equivalente a 50 saltos de conejo. Si un salto del perro equivale a 3 del conejo, y si el conejo da 8 saltos mientras el perro da 3, ¿en cuántos saltos alcanza el perro al conejo?

31. Tres niños están jugando. En cada jugada, uno pierde y dos ganan. Los que ganan doblan el puntaje que traían y el que pierde resta a su puntaje la suma de los puntajes que traían los dos ganadores. Después de tres jugadas, cada jugador ha ganado dos veces y ha perdido una. Al final, los tres tienen 40 puntos. ¿Cuántos puntos tenía cada uno al comienzo del juego?

32. A, B y C son tres números diferentes cuya suma es 28. Si A es la tercera parte de la suma de B y C, ¿cuánto suman estos dos últimos?

33. Utilizando la calculadora divido 9.307 : 146 y leo en la pantalla 63,7465. Pero no me interesan los decimales sino el resto de la división entera. ¿Cómo lo obtengo?

Referencias bibliográficas

- Maza G., C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Síntesis.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. 29 de abril **2.** 96 **3.** 5 monedas **4.** 1ª fila: 6, 3, 2; 2ª fila: 8, 5, 6; 3ª fila: 7, 9, 9 **5.** 9 años **6.** 71 **7.** Aula B **8.** 5 desagües **9.** Columna D **10.** 3 aviones **11.** 6

minutos **12.** 420 caramelos **13.** 8:43 a.m. **14.** Los tres números: 1, 8 y 9 **15.** 48 años y 7 meses **16.** 133 metros **17.** 19 autobuses **18.** Columna C **19.** 1ª fila: 3, 5, 6; 2ª fila: 1, 8, 3; 3ª fila: 4, 9, 6 **20.** 142.857 **21.** 80 años **22.** 1.908 = 4 x 477; 1.952 = 4 x 488; 2.500 = 5 x 500; 2.299, no **23.** 29 **24.** 12 estudiantes **25.** Agregar 1 unidad a cada número **26.** 765 plantas **27.** 76 **28.** Un factor > 1 y el otro < 1 **29.** $1 = (4/4)^{4-4}$; $3 = 4 - 4^{4-4}$; $5 = 4 + 4^{4-4}$; $7 = 4 + 4 - 4/4 = 44/4 - 4$; $9 = 4 + 4 + 4/4$ **30.** 150 saltos **31.** Jugador que pierde la 1ª jugada: 65; jugador que pierde la 2ª jugada: 35; jugador que pierde la 3ª jugada: 20 **32.** 21 **33.** 109; resto a 9.307 el producto de 63 x 146

Post data.-

Divide (bien) y vencerás