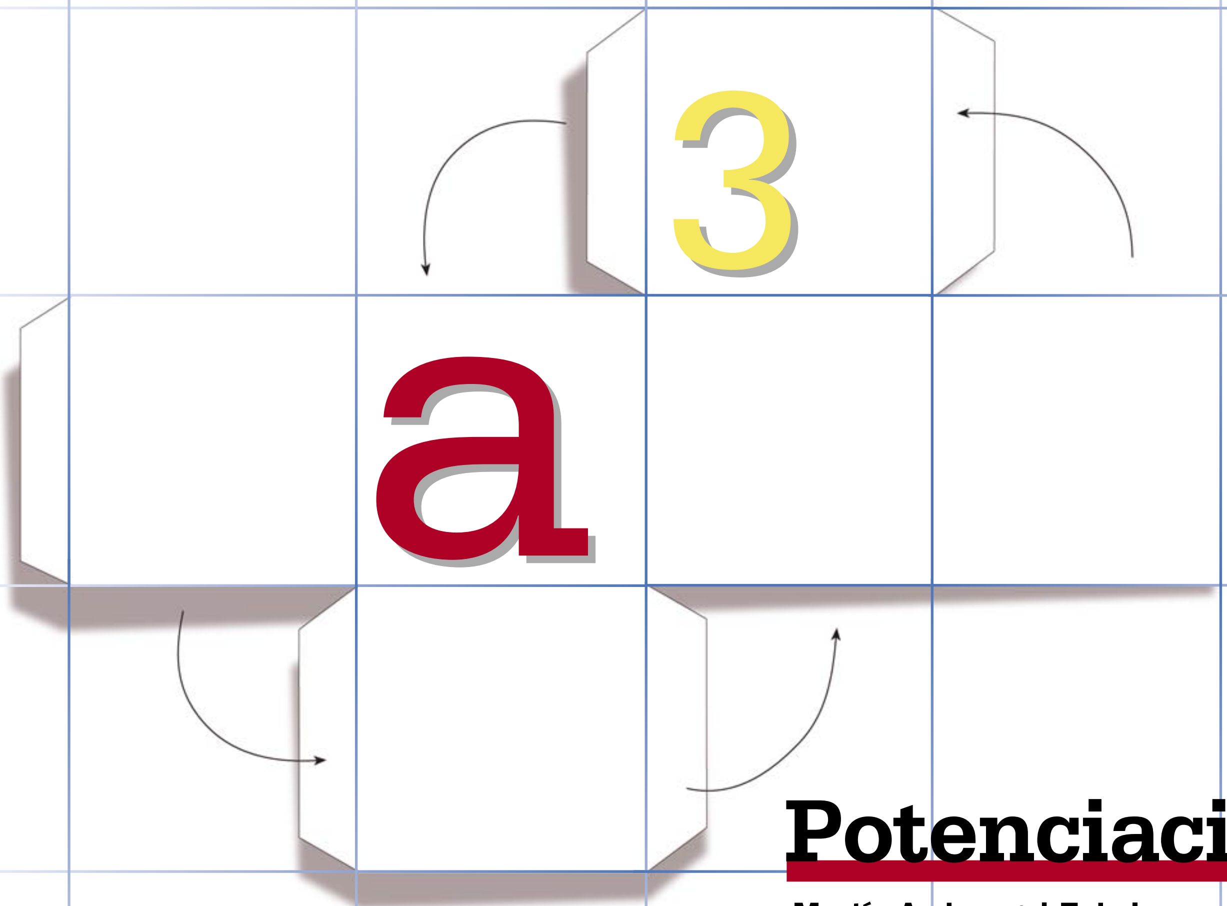
Serie

Desarrollo del pensamiento matemático

Nº 6



Potenciación

Martín Andonegui Zabala

372.7
And.
Multiplicación
Federación Internacional Fe y Alegría, 2005.
30 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-72-7
Matemáticas, potenciación.

El aprendizaje es el proceso cognitivo por excelencia que hace avanzar el desarrollo de la inteligencia. En cada edad, el ser humano está genéticamente preparado para desarrollar nuevas capacidades intelectuales. El educador debe ofrecer el contexto y la estimulación adecuados para lograr el desarrollo de esas capacidades".

Gabriela Alejandra Fairsten
y Silvana Gyssels

A modo de

Equipo editorial

María Bethencourt

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Serie: Potenciación, número 6
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.

Diseño y diagramación: Juan Bravo
Portada e ilustraciones: Juan Bravo
Corrección de textos: María Bethencourt, Margarita Arribas

Edita y distribuye: Federación Internacional Fe y Alegría.
Esquina de Luneta, Edif. Centro Valores, piso 7, Altagracia,
Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5645624 / 5645013 / 5632048
Fax (58) (212) 5646159
web: www.feyalegria.org

Depósito Legal: lf 603 2005 510 28 68
Caracas, octubre 2005

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis
Instituto Internacional para la Educación Superior
en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina
de Fomento (CAF)

introducción

y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

¿Cuál es la cifra de las unidades en el desarrollo de la potencia $\mathbf{8.642^{123}}$*?*

Halle el número de dos cifras cuyo valor es igual al cuadrado de la suma de dichas cifras.

¿Es par o impar la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos?

¿Qué potencia de base **3** es igual a la tercera parte de $\mathbf{3^{2.004}}$?

*Exprese el número **17** como suma de los cuadrados de tres números enteros, no necesariamente diferentes. Haga lo mismo con el número **36**. E igualmente con el número **98**.*

¿Cómo puede escribirse 1 millón como potencia de base 10?

*¿Qué número sigue en la secuencia: **0** , **1** , **2** , **5** , **26** , …?*

¿Cuántas cifras diferentes se necesitan para escribir el desarrollo de la potencia $\mathbf{10^{2.005}}$? ¿Y para el desarrollo de la potencia $\mathbf{0{,}01^{315}}$?

*¿Es posible que el cubo de un número natural termine en **2**?*

¿Cuál es el número natural cuyo cubo puede expresarse de la forma $\mathbf{2^9 \times 3^6}$?

*¿Qué números naturales **del 1 al 10** pueden expresarse como la diferencia de los cuadrados de dos números naturales?*

¿Puede ser par alguna de las potencias de un número impar?

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las líneas que siguen.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento– y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

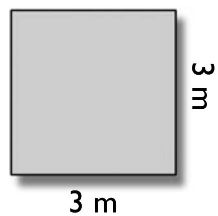
• Como complemento de lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales– que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel– ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

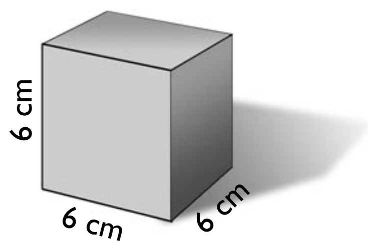
Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la potenciación.

1. ¿Qué es la potenciación de números naturales?

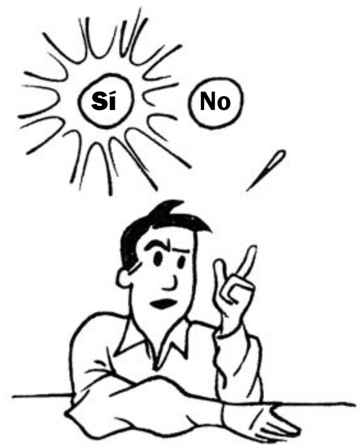
Veamos estos ejemplos. El área de un cuadrado cuyo lado mide **3** metros se obtiene multiplicando esa medida por sí misma: área = **3 m x 3 m = (3 x 3) m²**.



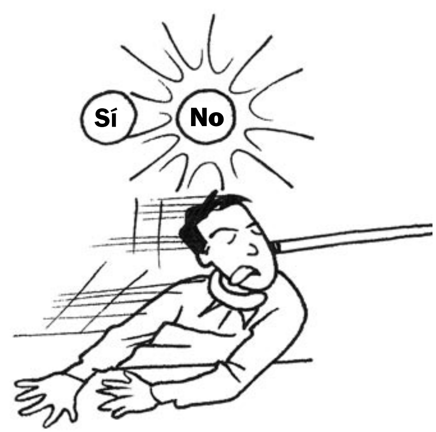
Si disponemos ahora de un cubo cuya arista mide **6** cm y queremos calcular su volumen, sabemos que éste se obtiene multiplicando la medida de esta arista por sí misma tres veces: volumen = **6 cm x 6 cm x 6 cm = (6 x 6 x 6) cm³**.



Supongamos, finalmente, que estamos participando en un juego de conocimientos y que con cada respuesta acertada duplicamos los puntos obtenidos anteriormente.



Si la puntuación inicial es 1 y un participante falla en su sexta pregunta, se retirará con **2 x 2 x 2 x 2 x 2** puntos, fruto de sus cinco respuestas correctas.



Las tres multiplicaciones mostradas (**3 x 3; 6 x 6 x 6; 2 x 2 x 2 x 2 x 2**) son singulares: en cada una de ellas se repite el factor. La operación que consiste en *multiplicar un factor reiteradamente se denomina potenciación*. Como puede observarse, no se trata realmente de una operación nueva en sentido estricto, sino de un caso particular de la multiplicación de números naturales, así que todo lo dicho al respecto en el Cuaderno anterior sigue conservando ahora su validez.

Pero, como veremos a lo largo de este Cuaderno, vale la pena detenernos en el estudio particular de la operación (así la consideraremos en adelante) de potenciación en virtud de sus singularidades, por la posibilidad que nos ofrece de ampliar las formas de representación de los números y potenciar nuestra capacidad de cálculo mental, por las propiedades que le son inherentes, por la variedad de problemas que nos permite plantear y resolver, por el esfuerzo de observación que nos exige permanentemente…

2. La representación de una potencia

Cada multiplicación de factores reiterados recibe el nombre de *potencia* y tiene su forma peculiar de escribirse. Así, **6 x 6 x 6** se escribe 6^3. Los elementos que intervienen en esa expresión tienen su propia nomenclatura:

- **6** se denomina *base de la potencia;* es el factor que se reitera.
- **3** se denomina *exponente de la potencia*; indica el número de veces que se repite la base como factor.
- 6^3 se denomina *potencia de base* **6** *y exponente* **3**; $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$.

Existen otras formas habituales de referirse a una potencia. Por ejemplo, 2^5 se puede leer: *2 elevado a la quinta; 2 a la quinta*; *la quinta potencia de 2*. Lo de "elevado" hace referencia a que el exponente se escribe más alto que la base… En cambio, no resulta acertado expresar "2 elevado a la quinta potencia", ya que el término "potencia" aparece ahí como redundante.

Cuando se trata de los exponentes **2** y **3** la lectura varía. Así, 3^2 se puede leer "la segunda potencia de **3**", "**3** elevado al cuadrado", o simplemente, "*el cuadrado de 3*" o "*3 al cuadrado*". Análogamente, 6^3 se puede leer "la tercera potencia de **6**", "*el cubo de 6*", "**6** elevado al cubo", o "*6 al cubo*". El uso de los términos "cuadrado" y "cubo" hace referencia a las situaciones geométricas expuestas en los ejemplos del comienzo del punto anterior: el área de un cuadrado se calcula mediante la potencia a^2 (a: longitud del lado) y el volumen de un cubo, mediante la potencia a^3 (a: longitud de la arista). De donde se sigue la asociación de los exponentes **2** y **3** con los términos cuadrado y cubo, respectivamente.

Agreguemos que suele denominarse "primera potencia de un número" al propio número. Así, la primera potencia de **7** es **7**. Simbólicamente, $7^1 = 7$ (sobre esto volveremos posteriormente).

3. Las regularidades presentes en las potencias

Pudiera pensarse que no hay muchas más cosas que decir acerca de las potencias y que bastaría con saber "leerlas" y calcular su valor, es decir, que si se nos aparece 2^5, debemos saber que su valor es $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. Y así en los demás casos. Sin embargo, una de las primeras cosas que debemos hacer es habituarnos a proceder en sentido inverso, esto es, a identificar las potencias cuando éstas se nos presentan desarrolladas. Por ejemplo, en el caso anterior, saber que **32** es la quinta potencia de **2**.

Para ello, resulta fundamental tener a la vista la tabla de las primeras potencias de los 10 primeros números enteros significativos:

Número	Cuadrado	Cubo
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1.000

3.1. La presencia de cuadrados y de cubos

Hay muchas regularidades presentes en esta tabla y en otras que iremos elaborando, regularidades que nos llaman a un ejercicio permanente de observación. Los buenos profesores de aritmética suelen recomendar, incluso, memorizar esta tabla, particularmente la columna de los cuadrados. Estos son números especiales, cuyo reconocimiento puede ayudarnos en más de una oportunidad. Por ejemplo, a abordar y resolver algunos de los ejercicios propuestos al inicio del Cuaderno:

Halle el número de dos cifras cuyo valor es igual al cuadrado de la suma de dichas cifras.

Del enunciado se desprende que el número de dos cifras coincide con un cuadrado. Su determinación se reduce a buscar la lista de los primeros cuadrados con dos cifras –específicamente del **16** al **81**– sumar sus dos dígitos, elevar esta suma al cuadrado, y observar si el resultado coincide con el número dado. El ensayo nos lleva al número **81**: $(8 + 1)^2 = 9^2 = 81$. En rigor, este ejercicio puede resolverse mentalmente y sólo requiere recordar los cuadrados de los primeros números enteros.

¿Es par o impar la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos?

Todos los números naturales terminan en una de las cifras del **0** al **9**. Para calcular si la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos es par o impar, basta con conocer las últimas cifras de ambos cuadrados. Y como podemos observar en la tabla anterior, los cuadrados de números pares son pares, y los de los impares, son impares a su vez. De modo que la diferencia buscada será siempre impar (más tarde trabajaremos sobre estas diferencias…).

Exprese el número 17 como suma de los cuadrados de tres números enteros, no necesariamente diferentes. Haga lo mismo con el número 36. E igualmente con el número 98.

a) $17 = 16 + 1 + 0$; $17 = 9 + 4 + 4$
b) $36 = 36 + 0 + 0$; $36 = 16 + 16 + 4$
c) $98 = 49 + 49 + 0$; $98 = 64 + 25 + 9$; $98 = 81 + 16 + 1$

Como puede observarse, este ejercicio se resuelve con soltura si se manejan, también con soltura, los cuadrados de los dígitos.

¿Qué número sigue en la secuencia: 0, 1, 2, 5, 26, …?

Este es un ejercicio de observación, cuya meta es descubrir el patrón o regla que se aplica a cada número (o a varios números anteriores) para obtener el siguiente. Si se procede aditivamente, vemos que los números que se van añadiendo de cada término al siguiente son, progresivamente: **1**, **1**, **3**, **21**; no se observa ningún patrón fijo. Por la vía multiplicativa, tampoco aparece un factor único que, al multiplicar a cada término, nos dé como resultado el siguiente.

Pero una lectura más atenta y una familiaridad con los cuadrados nos hace ver, finalmente, que $0^2 + 1 = 1$; $1^2 + 1 = 2$; $2^2 + 1 = 5$; $5^2 + 1 = 26$. De modo que el patrón presente para obtener cada término sucesivo es "elevar al cuadrado el anterior, y agregar una unidad". Así, el término siguiente será **26^2 + 1 = 676 + 1 = 677**.

¿Es posible que el cubo de un número natural termine en 2?

La primera impresión es que el ejercicio no puede resolverse, por cuanto habría que elevar al cubo todos los números naturales para poder responder con certeza. Pero afortunadamente no se precisa de tal búsqueda exhaustiva porque, como se dijo anteriormente, todos los números naturales terminan en una de las cifras del **0** al **9**. Y la última cifra del cubo de cualquier número natural sólo depende de la última cifra de este último.

Tales cifras finales de los cubos están en la tabla anterior. Y el **2** sí aparece como última cifra de un cubo: el de **8** (**512**). Por consiguiente, la pregunta tiene una respuesta afirmativa: el cubo de todo número entero que acaba en **8** (y sólo el de estos números), termina en **2**.

¿Qué números naturales del 1 al 10 pueden expresarse como la diferencia de los cuadrados de dos números naturales?

Todo lo que hay que hacer es observar de nuevo la columna de los primeros cuadrados y ensayar las alternativas posibles. Y así, vemos:

1 = 1 – 0
3 = 4 – 1
4 = 4 – 0
5 = 9 – 4
7 = 16 – 9
8 = 9 – 1
9 = 25 – 16 = 9 – 0

3.2. La última cifra del desarrollo de una potencia

Después de resolver estos ejercicios quizá –ojalá sea así…– se nos está acrecentando la curiosidad acerca de los cuadrados y de los cubos. Por ejemplo, podemos preguntarnos en cuáles dígitos terminan –y en cuáles no– los cuadrados de los números naturales. Y la respuesta está ahí: pueden terminar en 0, 1, 4, 5, 6 ó 9. Pero el cuadrado de un número entero nunca puede terminar en 2, 3, 7 u 8. Más aún:

- si el cuadrado termina en 1, el número puede terminar en 1 ó en 9
- si el cuadrado termina en 4, el número puede terminar en 2 ó en 8
- si el cuadrado termina en 9, el número puede terminar en 3 ó en 7
- si el cuadrado termina en 6, el número puede terminar en 4 ó en 6

Observe que los pares de posibilidades en cada caso (1 y 9, 2 y 8, 3 y 7, 4 y 6) suman siempre 10 (1 + 9 = 10, etc.). ¿Puras coincidencias? ¿O todo esto responde a alguna razón? Aquí tiene vía libre para su curiosidad… Lo cierto es que sólo los cuadrados que terminan en 0 ó en 5 remiten a una sola posibilidad: que el número que se elevó al cuadrado termine en 0 ó en 5, respectiva y exclusivamente.

¿Y en qué cifras pueden terminar los cubos de los números enteros? La consulta de la tabla anterior nos ofrece una respuesta quizá sorprendente, a la vista del último resultado: los cubos de los números enteros sí pueden terminar en cualquier dígito. Y además, la lectura de ese dígito nos remite a una sola posible cifra final del número que se elevó al cubo.

¿Y qué pasará con las últimas cifras de las demás potencias…? La respuesta a esta pregunta nos puede llevar a una indagación cuyo resultado se presenta en la siguiente tabla referida a los últimos dígitos de un número (presentados en la 1ª fila) y de sus respectivas potencias, a partir de la 1ª (restantes filas hasta la 10ª, aunque podrían prolongarse indefinidamente):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2ª	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
3ª	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
4ª	1	6	***1***	6	5	6	1	6	1	0
5ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
6ª	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
7ª	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
8ª	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
9ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
10ª	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

Los dígitos que se encuentran en cada casilla del interior de la tabla representan, pues, la última cifra de la potencia indicada a la izquierda de la fila y correspondiente al dígito que se halla en la parte superior de la columna correspondiente. Así, la cifra ***1*** destacada en la casilla interior de la 4ª fila y 3ª columna, nos indica que el último dígito de 3^4 es **1**: efectivamente, $3^4 = 81$, cuya última cifra es **1**.

Pero, en realidad, no es preciso hacer este cálculo completo de cada potencia para obtener esa última cifra. En rigor, este dígito se obtiene simplemente multiplicando la cifra de la casilla superior por el dígito que figura como base de las potencias, y quedándonos con la última cifra de ese producto. Así, si por ejemplo tomamos las sucesivas potencias de **7**, la 1ª termina en **7** (es el mismo número), la 2ª en **9** (última cifra de **7 x 7 = 49**), la 3ª en **3** (última cifra de **9 x 7 = 63**), la 4ª en **1** (última cifra de **3 x 7 = 21**), etc.

Ahora vamos a "bucear" en esa tabla. Vamos a observar con cuidado las filas y las columnas, una por una y en conjunto, con el fin de anotar las regularidades que percibamos. Sólo después de este ejercicio personal y colectivo, proseguiremos con la lectura.

PARADA OBLIGATORIA

¿Qué regularidades hemos descubierto? Veamos algunas (esperemos que con las mismas u otras palabras, estén las que hemos hallado):

1. Todas las potencias de **1**, **5**, **6** y **0** terminan en las mismas cifras, respectivamente.

2. Las potencias de **2**, **3**, **7** y **8** pueden terminar en 4 cifras posibles en cada caso. Así, las de **2** y **8** pueden terminar sólo en **2**, **4**, **6** u **8**. Y las de **3** y **7**, sólo en **1**, **3**, **7** ó **9**.

3. Las potencias de **4** y **9** pueden terminar en 2 cifras posibles en cada caso. Así, las de **4** pueden terminar sólo en **4** ó **6**. Y las de **9**, sólo en **1** ó **9**.

4. Resumiendo lo anterior, las últimas cifras de todas las potencias de los dígitos se repiten cíclicamente para cada dígito, y estos ciclos tienen una extensión de 1, 2 ó 4 veces, según los casos expuestos en los tres puntos anteriores.

Así, por ejemplo en el caso de las potencias de **2**, las últimas cifras son, progresivamente, **2**, **4**, **8** y **6**. Este ciclo se repite de nuevo e indefinidamente, de 4 en 4 potencias: la 5ª termina en **2**, la 6ª en **4**, etc. Visto de otra forma, en **2** terminan las potencias 1ª, 5ª, 9ª, 13ª, etc. Es decir, todas aquellas cuyo exponentes son múltiplos de **4** (productos exactos de 4) más **1** unidad. Dicho de otro modo, las potencias que al dividirse entre **4** nos dan **1** como resto. Por ejemplo, 2^{41} termina en **2**, pues se comporta como 2^1 (el resto de **41 : 4** es **1**).

Completando esta observación acerca de las últimas cifras de las potencias de números que acaban en **2**, terminan en **4** las potencias cuyo exponente, al dividirse entre **4**, den de resto **2**. En **8**, las que den de resto **3**. Y en **6**, las que den como resto **0** (los múltiplos de **4**). De modo que podemos saber en qué cifra termina cualquier potencia de cualquier número que termina en **2**. Y así, con todos los demás dígitos finales, de acuerdo con la información presente en la última tabla.

Probablemente hemos descubierto otras regularidades o curiosidades: que cada 4 filas se repite todo el bloque de contenidos de las casillas; que las columnas del **3** y del **7** (**3 + 7 = 10**) comparten los mismos dígitos aunque en distinto orden; que lo mismo les ocurre a las columnas del **2** y del **8** (**2 + 8 = 10**); y ojalá que algunas otras más.

Ahora estamos en capacidad de responder algunos otros de los ejercicios propuestos al inicio del Cuaderno:

¿Cuál es la cifra de las unidades en el desarrollo de la potencia 8.642^{123}?

Como acabamos de ver, la cifra solicitada sólo depende de la cifra final de la base de la potencia (**2**) y de su exponente (**123**). Como los dígitos finales de las sucesivas potencias de **2** se repiten de 4 en 4, vamos a averiguar en qué lugar de este ciclo de 4 "cae" el exponente 123. Para ello buscamos el resto de dividir **123 : 4**, que es **3** (**123 = 4 x 30 + 3**). Por consiguiente, 2^{123} posee como última cifra la misma que 2^3, es decir, **8**. Así pues, 8.642^{123} termina en **8**.

¿Puede ser par alguna de las potencias de un número impar?

Si observamos en la tabla anterior las columnas correspondientes a los dígitos impares –basta con observar los cuatro primeros elementos de esas columnas– nos percatamos de que las últimas cifras siempre son impares. En conclusión, las potencias de un número impar nunca pueden ser pares.

Y de plantearnos y resolver otros similares (inténtelo por su cuenta, antes de revisar las soluciones que se proponen):

¿Cuáles son las cifras de las unidades en los desarrollos de las potencias:
a) 2.004^{165} **b)** 106^{605} **c)** 393^{100} **d)** 789^{642}**?**

a) El ciclo del dígito **4** como última cifra de la base de una potencia está formado por dos cifras: el **4** para los exponentes impares, y el **6** para los pares (véase la tabla anterior). Por consiguiente, por ser **165** impar, 2.004^{165} termina en **4**.

b) Cuando el último dígito de la base es **6**, todas las potencias terminan en **6**. De modo que 106^{605} termina en **6**.

c) Como los dígitos finales de las sucesivas potencias de **3** se repiten de 4 en 4 (véase la tabla anterior), vamos a averiguar en qué lugar de este ciclo de 4 "cae" el exponente **100**. Para ello buscamos el resto de dividir **100 : 4**, que es **0** (**100 = 4 x 25**). Por consiguiente, 3^{100} posee como última cifra la misma que 3^4, es decir, **1**. Así pues, 393^{100} termina en **1**.

d) Como en el caso del 4, el ciclo del dígito **9** como última cifra de la base de una potencia está formado por dos cifras: el **9** para los exponentes impares, y el **1** para los pares (véase la tabla anterior). Por consiguiente, por ser **642** par, 789^{642} termina en **1**.

3.3. Relaciones entre cuadrados

Veamos ahora otro tipo de regularidades referentes a los cuadrados y, en particular, a las diferencias entre los cuadrados consecutivos, es decir, entre los cuadrados de números naturales consecutivos:

Números:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…..
Cuadrados:	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	…..
Diferencias:	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	…..	

Como puede apreciarse, cada diferencia se obtiene a partir de los cuadrados de la segunda línea: el minuendo se encuentra a la derecha de la diferencia, y el sustraendo a su izquierda. Así, 7 = 16 – 9; 13 = 49 – 36, etc.

Nuestro primer descubrimiento es que el conjunto de las diferencias es, precisamente, el conjunto de los números impares. Es decir, todo número impar puede expresarse como la diferencia de dos cuadrados consecutivos. Para que este resultado nos permita ampliar nuestra capacidad de cálculo, vamos a presentarlo de otra manera:

Números:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…..
Cuadrados:	0^2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	…..
	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	…..
Diferencias:	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	…..	
	0+1	1+2	2+3	3+4	4+5	5+6	6+7	7+8	8+9	9+10	…..	

Si observamos con atención los datos anteriores podemos percibir que, por ejemplo:

7 = 16 – 9; o, lo que es lo mismo: $3 + 4 = 4^2 – 3^2$

13 = 49 – 36; o, lo que es lo mismo: $6 + 7 = 7^2 – 6^2$; etc.

Es decir, hay una correspondencia entre cada número impar (6 + 7) y las bases de los cuadrados que se restan para obtener dicho número impar ($7^2 – 6^2$). Esta regularidad puede extenderse ahora a cualquier otro caso. Así, si escribimos como n + 1 el número natural que sigue a n, tenemos:

$$(n + 1)^2 – n^2 = n + (n + 1)$$

regularidad cuya lectura nos dice que "*la diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es igual a la suma de dichos números consecutivos*". Es fácil darse cuenta de que a partir de aquí podemos resolver dos tipos de preguntas al respecto:

¿Cuál es la diferencia de la resta $2.004^2 – 2.003^2$?

Podemos obtener ambos cuadrados y luego restarlos; pero, por lo que hemos visto, no es preciso este esfuerzo. Como las bases de ambos cuadrados son números consecutivos, por analogía con los resultados anteriores podemos deducir inmediatamente: $2.004^2 – 2.003^2 = 2.003 + 2.004 = 4.007$. Puede verificarlo con la calculadora.

Exprese el número 793 como diferencia de dos cuadrados.

Todo el problema consiste en expresar **793** como suma de dos números consecutivos, lo cual siempre es posible. Para ello basta encontrar "la mitad de dicho número menos 1", es decir, de **792**: la mitad de **700** es **350**, la de **90** es **45**, y la de **2** es **1**. De donde, la mitad de **792** es **396** (**350 + 45 + 1**). Por consiguiente, **793 = 396 + 397**. Y finalmente: $793 = 397^2 – 396^2$. Puede verificarlo con la calculadora.

Aún podemos ampliar el campo de regularidades relativas a los cuadrados de los números. Por ejemplo, el último ejercicio nos permite escribir el resultado de esta otra forma:

$397^2 – 396^2 = 396 + 397 = 396 + 396 + 1 = 2 \times 396 + 1$

es decir: $397^2 – 396^2 = 2 \times 396 + 1$

de donde: $397^2 = 396^2 + 2 \times 396 + 1$

Y esto se observa en cualquier caso. Por ejemplo: $9^2 = 8^2 + 2 \times 8 + 1$. Efectivamente, $81 = 64 + 16 + 1$.

Es decir, tenemos en la mano un procedimiento para ir obteniendo progresivamente (y mentalmente) los cuadrados de todos los números naturales a partir de uno dado. Basta añadir a este cuadrado el doble de su base y agregar 1, para llegar a tener el cuadrado del siguiente número natural. En términos simbólicos (**n** representa cualquier número natural; **2n** debe interpretarse como **2 x n**):

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Así podemos ir construyendo (hágalo mentalmente) los cuadrados de los números **11** en adelante:

$11^2 = 10^2 + 2 \times 10 + 1 = 100 + 20 + 1 = 121$
$12^2 = 11^2 + 2 \times 11 + 1 = 121 + 22 + 1 = 144$
$13^2 = 12^2 + 2 \times 12 + 1 = 144 + 24 + 1 = 169$
$14^2 = 13^2 + 2 \times 13 + 1 = 169 + 26 + 1 = 196$; etc.

Y también de cualquier otro número: todo lo que necesitamos es un cuadrado en el que "apoyarnos", sea inmediato o un poco más lejano…

Si el cuadrado de 140 es 19.600, ¿cuál es el cuadrado de 141?
Sencillo: $141^2 = 140^2 + 2 \times 140 + 1 = 19.600 + 280 + 1 = 19.881$

Obtenga el cuadrado de 52.
Una forma de hacerlo puede ser multiplicando 52 por sí mismo. Otra forma, mental, puede ser procediendo a partir del cuadrado de **50** –que es **2.500**– para llegar al de **51**, y de ahí al de **52**:

$51^2 = 50^2 + 100 + 1 = 2.601$
$52^2 = 51^2 + 102 + 1 = 2.601 + 102 + 1 = 2.704$

Si la curiosidad nos sigue picando, quizás algún(a) lector(a) se pregunte por la posibilidad de, por ejemplo, llegar directamente al cuadrado de **52** a partir del de **50**, sin tener que dar pasos intermedios. Es decir, por la posibilidad de hallar una regularidad que pueda aplicarse al caso de $(n + 2)^2$, $(n + 3)^2$ y, en general, de $(n + m)^2$, siendo **n** y **m** la representación de dos números naturales cualesquiera.

Con el fin de descubrir esa regularidad vamos a presentar unos ejemplos gráficos. En el dibujo siguiente se muestra una representación de 3^2, como el cardinal del conjunto de puntos presentes en la forma cuadrada:

• • •
• • •
• • •

A partir de esta representación podemos construir la de 4^2 –que es $(3 + 1)^2$– agregando elementos a la figura anterior:

○ ○ ○ □
• • • ○
• • • ○
• • • ○

Como puede visualizarse, $4^2 = 3^2$ (los •) + 2 x (3 x 1) (los dos bloques de ○) + 1 (el □), resultado que ya conocíamos. Vamos a proceder de una forma análoga para 5^2 –que es $(3 + 2)^2$-, a partir de 3^2:

○ ○ ○ □ □
○ ○ ○ □ □
• • • ○ ○
• • • ○ ○
• • • ○ ○

Como podemos visualizar ahora, $5^2 = 3^2$ (los •) + 2 x (3 x 2) (los dos bloques de ○) + 2^2 (los □). Análogamente podemos proceder para 7^2 –que es $(4 + 3)^2$–, a partir de 4^2:

○	○	○	○	□	□	□
○	○	○	○	□	□	□
○	○	○	○	□	□	□
•	•	•	•	○	○	○
•	•	•	•	○	○	○
•	•	•	•	○	○	○
•	•	•	•	○	○	○

Ahora la visualización lleva a: $7^2 = (4 + 3)^2 = 4^2$ **(los •) + 2 x (4 x 3) (los dos bloques de ○) +** 3^2 **(los □)**. A partir de todos estos resultados podemos generalizar la regularidad (**n** y **m** representan dos números naturales cualesquiera; **2nm** debe interpretarse como **2 x n x m**):

$$(n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$$

A este mismo resultado llegamos si partimos de la idea de la potencia como producto de un número por sí mismo. Por ejemplo, $7^2 = 7 \times 7 = (4 + 3) \times (4 + 3) = 4 \times (4 + 3) + 3 \times (4 + 3) = (4 \times 4) + (4 \times 3) + (3 \times 4) + (3 \times 3) = 4^2 + 2 \times (4 \times 3) + 3^2$. Que fácilmente se puede generalizar al caso de $(n + m)^2$.

Esta regularidad se expresa así: "El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble del producto de ambos números". O también, de una forma algo más resumida: "*El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de los cuadrados de ambos números y de su doble producto*". Fijémonos en que se trata de tres sumandos, y no de sólo dos (**n^2 y m^2**).

Así, por ejemplo, $15^2 = (10 + 5)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 5 + 5^2 = 100 + 100 + 25 = 225$. Lo importante aquí reside en saber "disociar" convenientemente la base que se eleva al cuadrado. Obsérvese también que la regularidad previa: $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, es un caso particular de la última, cuando $m = 1$.

A partir de aquí es posible, pues, calcular el cuadrado de cualquier número natural, sin necesidad de conocer el del número anterior, sino simplemente el de dos números más sencillos cuya suma sea el número inicial.

Calcule mentalmente los cuadrados de los siguientes números:

21	***34***	***45***	***52***	***73***	***105***
120	***109***	***350***	***504***	***33***	***25***
68	***805***	***91***			

Pero hay todavía más en cuanto a regularidades que relacionan los cuadrados de los números. Por ejemplo, si estamos interesados en obtener mentalmente el cuadrado de 98, podemos proceder por la vía de disociar 98 como 90 + 8 y seguir con la fórmula que recoge la regularidad anterior.

Pero cualquiera puede observar que **98** está muy cerca de **100** (cuyo cuadrado es muy fácil de calcular, **10.000**), por lo que cabe preguntarse si 98^2 puede inferirse a partir de 100^2. Es decir, si el cuadrado de un número puede obtenerse a partir del cuadrado de un número mayor. Veamos esta posibilidad tomando como referencia el último de los ejemplos gráficos presentados:

○	○	○	○	□	□	□
○	○	○	○	□	□	□
○	○	○	○	□	□	□
•	•	•	•	○	○	○
•	•	•	•	○	○	○
•	•	•	•	○	○	○
•	•	•	•	○	○	○

¿Cómo llegar a 4^2 partiendo de 7^2? Es decir, ¿cómo llegar a $(7 - 3)^2$ desde 7^2? Evidentemente, si partimos de **49**, tenemos que restarle "algo" a este número para llegar a **16**. Vamos a tratar de visualizar lo que hay que restar. En primer lugar, puedo restar el bloque formado por las tres primeras filas completas: **7 x 3** elementos "blancos" ($7^2 - 7 \times 3 = 49 - 21 = 28$). Y ahora, atención. Si a esta diferencia le vuelvo a restar el bloque formado por las tres últimas columnas completas (otros **7 x 3** elementos "blancos"), me estaría "pasando" en lo que hay que restar ($28 - 7 \times 3 = 28 - 21 = 7$): en realidad estaría quitando de la distribución original "dos veces el cuadrado de los □", una vez con el bloque de las tres primeras filas completas, y otra vez con el bloque de las tres últimas columnas completas. Luego, para quitar lo justo, tengo que "devolver" una vez ese cuadrado ($7 + 9 = 16$) a lo que queda después de las dos restas efectuadas.

En resumen: $4^2 = (7 - 3)^2 = 7^2 - 7 \times 3 - 7 \times 3 + 3^2$. Es decir: $(7 - 3)^2 = 7^2 - 2 \times (7 \times 3) + 3^2$. Y desde esta visualización podemos generalizar la regularidad (n y m representan dos números naturales cualesquiera, tales que $n > m$; $2nm$ debe interpretarse como $2 \times n \times m$):

$$(n - m)^2 = n^2 - 2nm + m^2$$

Esta regularidad se expresa así: "El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, menos el doble del producto de ambos números". O también, de una forma algo más resumida: "*El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de los cuadrados de ambos números, menos su doble producto*". Fijémonos en que se trata de tres términos –dos que se suman y uno que se resta– y no de sólo dos que se restan (n^2 y m^2), error también muy frecuente.

Así, por ejemplo, $15^2 = (20 - 5)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 5 + 5^2 = 400 - 200 + 25 = 225$. Lo importante, aquí también, reside en saber "disociar" convenientemente la base que se eleva al cuadrado. Disponemos, pues, de otra estrategia adicional para calcular el cuadrado de cualquier número natural, simplemente a partir de los cuadrados de dos números cuya diferencia sea el número inicial.

Calcule mentalmente los cuadrados de los siguientes números. Hágalo por las vías que estime oportunas:

29	***38***	***45***	***19***	***77***	***95***
118	***109***	***350***	***495***	***392***	***25***
68	***805***	***197***			

Como el(la) lector(a) avispado(a) habrá observado, todas estas regularidades referentes a los cuadrados tienen como destino inmediato facilitar algunos cálculos aritméticos mentales. ¿Es posible extender estas facilidades a otros casos con otros formatos? Es decir, ¿podemos hallar otras regularidades relacionadas con cuadrados?

La respuesta es positiva. Veamos otra situación al respecto. Vamos a plantear una serie de productos y a observar lo que acontece, con el fin de descubrir las regularidades presentes:

- $7 \times 5 = 35$; es decir: $(6 + 1) \times (6 - 1) = 35 = 36 - 1 = 6^2 - 1^2$
- $8 \times 4 = 32$; es decir: $(6 + 2) \times (6 - 2) = 32 = 36 - 4 = 6^2 - 2^2$
- $9 \times 3 = 27$; es decir: $(6 + 3) \times (6 - 3) = 27 = 36 - 9 = 6^2 - 3^2$
- $10 \times 2 = 20$; es decir: $(6 + 4) \times (6 - 4) = 20 = 36 - 16 = 6^2 - 4^2$

- $8 \times 10 = 80$; es decir: $(9 - 1) \times (9 + 1) = 80 = 81 - 1 = 9^2 - 1^2$
- $7 \times 11 = 77$; es decir: $(9 - 2) \times (9 + 2) = 77 = 81 - 4 = 9^2 - 2^2$
- $6 \times 12 = 72$; es decir: $(9 - 3) \times (9 + 3) = 72 = 81 - 9 = 9^2 - 3^2$
- $5 \times 13 = 65$; es decir: $(9 - 4) \times (9 + 4) = 65 = 81 - 16 = 9^2 - 4^2$

Resumiendo algunos de los resultados anteriores, destacamos la regularidad presente:

$$(6 + 1) \times (6 - 1) = 6^2 - 1^2$$
$$(6 + 3) \times (6 - 3) = 6^2 - 3^2$$
$$(9 - 2) \times (9 + 2) = 9^2 - 2^2$$
$$(9 - 4) \times (9 + 4) = 9^2 - 4^2$$

A partir de esta visualización, la regularidad puede generalizarse de esta forma (n y m representan a dos números naturales cualesquiera, tales que $n > m$):

$$(n + m) \times (n - m) = n^2 - m^2$$

o bien:

$$n^2 - m^2 = (n + m) \times (n - m)$$

y leerse así: "*El producto de dos números –que se obtienen, respectivamente, a partir de la suma y de la diferencia de otros dos números 'previos'– es igual a la diferencia de los cuadrados de estos dos números previos*". O también: "*La diferencia de los cuadrados de dos números naturales es igual al producto de la suma de ambos números por su diferencia*".

Para poder aplicar la transformación sugerida en la primera lectura de la regularidad todo lo que se requiere es que la diferencia entre los factores (números naturales) sea par: así se puede obtener ese número intermedio al que se sumará y restará la misma cantidad para llegar a ambos factores. Por ejemplo, si los factores son **13** y **17**, su semisuma **(13 + 17)/2 = 15** es el "pivote" buscado, ya que **17 = 15 + 2 y 13 = 15 – 2**. También se puede llegar a ese número intermedio dividiendo entre **2** la diferencia entre ambos factores **(17 – 13)/2 = 2** y agregando este valor al menor de los factores: **13 + 2 = 15**. De esta forma:

$13 \times 17 = (15 - 2) \times (15 + 2) = 15^2 - 2^2 = 225 - 4 = 221$

Calcule mentalmente los siguientes productos: 23 x 17; 56 x 44; 95 x 105

$23 \times 17 = (20 + 3) \times (20 - 3) = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$
$56 \times 44 = (50 + 6) \times (50 - 6) = 50^2 - 6^2 = 2.500 - 36 = 2.464$
$95 \times 105 = (100 - 5) \times (100 + 5) = 100^2 - 5^2 = 10.000 - 25 = 9.975$

La segunda interpretación nos permite encarar y resolver mentalmente ejercicios como los siguientes:

Calcule mentalmente las siguientes diferencias: $25^2 - 15^2$; $63^2 - 37^2$; $99^2 - 98^2$

$25^2 - 15^2 = (25 + 15) \times (25 - 15) = 40 \times 10 = 400$
$63^2 - 37^2 = (63 + 37) \times (63 - 37) = 100 \times 26 = 2.600$
$99^2 - 98^2 = (99 - 98) \times (99 + 98) = 1 \times 197 = 197$

Obsérvese que el último de estos ejercicios representa la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos –**99** y **98**–, resultado que podíamos haber obtenido aplicando la primera de las regularidades que destacamos más arriba: $(n + 1)^2 - n^2 = n + (n + 1)$. Es decir, $99^2 - 98^2 = 98 + 99$. De modo que esta primera regularidad se nos aparece ahora como un caso particular de la última que hemos descubierto.

Quizás estemos empezando a asombrarnos de nuestra capacidad de poder efectuar cálculos por unas vías que se alejan de la simple realización de las operaciones de suma, resta y multiplicación. Y todo ello basándonos en unas regularidades que estaban ahí, esperando que las descubriéramos.

Como vemos, la matemática de los números es algo más y algo muy diferente del mero hacer operaciones: hay espacio para la curiosidad, para la observación, para el descubrimiento, para la aplicación; para sentirnos bien, en una palabra. Y si nos sentimos así, vamos bien. Porque de esto se trata: de percibirnos a nosotros mismos, a la matemática, y a nuestra relación con ella, de otra forma más cercana, más comprensible, más confiada.

He aquí, pues, en resumen y en forma simbólica, las regularidades que hemos descubierto hasta ahora, referentes a los cuadrados de los números:

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$
$$(n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$$
$$(n - m)^2 = n^2 - 2nm + m^2$$
$$(n + m) \times (n - m) = n^2 - m^2$$

3.4. Otras regularidades referentes a potencias

No buscamos ser exhaustivos en la relación de todas las regularidades que pueden hallarse en el estudio de las potencias. Son muchas. Pero sí estamos propiciando el descubrimiento de algunas, con la esperanza de que nos sintamos espoleados para buscar otras por nuestra cuenta.

Por ejemplo, coloquemos la secuencia de los cubos de los primeros números naturales significativos:

1 8 27 64 125 216 343 512 729 1.000 ….

Y procedamos a hacer sumas parciales, cada vez con un sumando más:

$1 = 1^2$
$1 + 8 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$
$1 + 8 + 27 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$
$1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$
$1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$
etc.

He aquí una regularidad que liga la suma de los cubos de los primeros números con el cuadrado de la suma de esos números, y que pudiera generalizarse así:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n)^2$$

¿Utilidad de esta regularidad? Pues por de pronto nos permite obtener por una vía breve la suma, por ejemplo, de los 15 primeros cubos (no tenemos que calcular 15 cubos y luego sumarlos, sino tan sólo sumar 15 números y obtener el cuadrado de esta suma):

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 15)^2 = 120^2 = 14.400$$

Como se ve, la utilidad de esta regularidad es quizá menor que la de las regularidades descubiertas anteriormente, pero ¿no nos llama la atención la singularidad de este resultado, su armonía, en una palabra, su *belleza*? Porque también la matemática está abierta a la belleza, y no sólo a la de las figuras geométricas, sino también a la de los números.

La curiosidad y la búsqueda de la belleza (la armonía, la simetría, la regularidad, la simplicidad…) han sido dos de los motores –no los únicos, porque también cuenta la aventura intelectual de construir un edificio de saberes tan singulares, así como la resolución de los problemas de la vida diaria y de otras disciplinas científicas– que han impulsado –y lo siguen haciendo– la construcción y el avance de la matemática.

Lo grandioso es que estos mismos motores pueden estar a nuestro alcance –y al de nuestros alumnos– en estos temas sencillos de la matemática escolar, en los que también nos está permitido aventurarnos, observar y descubrir regularidades, y complacernos en su visión… Esto también forma parte, y muy importante, de la matemática, de su aprendizaje y de su enseñanza.

Veamos otra regularidad. Pierre Fermat (1601-65) fue un abogado francés aficionado a la matemática, a la que dedicaba parte de su tiempo libre. Esta dedicación, aunque escasa en el tiempo, fue realmente fructífera: basado en su curiosidad, en su intuición y en su capacidad de observación, formuló una gran

cantidad de regularidades (teoremas) que afectaban a los números enteros, aunque rara vez las demostró formalmente, trabajo que recayó en matemáticos posteriores (Kline, 1992).

He aquí una de sus propuestas: "Todo número entero positivo es suma de 4 cuadrados enteros –diferentes o repetidos–, incluyendo el 0" (Gentile, 1985). Por ejemplo, $78 = 64 + 9 + 4 + 1$; o también: $78 = 49 + 25 + 4 + 0$; y además: $78 = 36 + 25 + 16 + 1$.

> ***Escriba cada uno de los números siguientes como suma de 4 cuadrados enteros: 33; 97; 59; 167; 215***

Algunas regularidades se refieren también a relaciones que no se cumplen jamás o sólo condicionalmente. Entre ellas quizá la más famosa es la que se conoce como "el último teorema de Fermat", cuyo enunciado dice: "No existen valores x, y, z tales que verifiquen la relación $x^n + y^n = z^n$ (en la que x, y, z, n son números enteros positivos) si $n > 2$". Es decir, un cubo no puede expresarse como la suma de dos cubos, ni una cuarta potencia como la suma de dos cuartas potencias, y así sucesivamente.

La relación funciona cuando $n = 2$, y constituye lo que conocemos como la relación pitagórica: $x^2 + y^2 = z^2$ (nombre que se deriva del enunciado del llamado teorema de Pitágoras, que establece que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos). Evidentemente, no cualquier terna de números verifica la relación anterior, pero sí hay ternas que lo hacen; entre las más conocidas que sí la verifican están: 5, 4, 3 ($3^2 + 4^2 = 5^2$); 5, 12, 13 ($5^2 + 12^2 + = 13^2$); etc.

Halle otras cuatro ternas pitagóricas.

4. Las propiedades que no posee la potenciación

Aunque pueda sorprender un poco este párrafo, comenzamos por destacar las propiedades que no posee esta operación, para que no nos agarren despistados…

¿Es *conmutativa* la potenciación? Esto implica preguntarse si $n^m = m^n$ para cualquier par de números naturales n y m. Como se ve, la respuesta es negativa; por ejemplo, $2^5 \neq 5^2$. Ojo: no se deje sorprender si le dicen que $2^4 = 4^2$, lo cual es cierto, pero no permite una generalización para cualquier par de números naturales…

¿Es *asociativa* la potenciación? Una respuesta afirmativa significaría que, tomados tres números naturales cualesquiera, no importaría la forma de seleccionar los dos primeros de ellos para operarlos como base y exponente, y luego tomar este resultado parcial como base y aplicarle como exponente el tercero de los números: siempre se debería obtener el mismo resultado final.

Tomemos, por ejemplo, los números 2, 3 y 5 y veamos:

$(2^3)^5 = 8^5 = 32.768$;
$(3^5)^2 = 243^2 = 59.049$;
$(5^2)^3 = 25^3 = 15.625$; etc.

Como puede apreciarse, no se obtiene el mismo resultado. Por consiguiente, la potenciación no es asociativa.

Tampoco posee *elemento neutro*, porque sólo "funciona" por la derecha, como exponente. En efecto, cualquier número elevado a 1 reproduce el mismo número: $n^1 = n$. Pero no hay ningún número natural m que haga lo mismo por la izquierda, como base; es decir, que $m^n = n$, para cualquier n.

¿Es *distributiva* la potenciación *con respecto a la suma o la resta* de números naturales? De ser afirmativa la respuesta significaría que, por ejemplo, dan el mismo resultado 2^{5+3} y $2^5 + 2^3$. Pero esto no es así: $2^{5+3} = 2^8 = 256$, mientras que $2^5 + 2^3 = 32 + 8 = 40$. Lo mismo ocurre en el caso de la distributividad con respecto a la resta. De donde se sigue que la potenciación no es distributiva con respecto a la suma y a la resta de números naturales.

5. Algunas propiedades de las operaciones con potencias

Donde sí aparecen ciertas regularidades es en el campo de las operaciones con potencias. El conocimiento y la aplicación de estas propiedades nos permiten manejar esas operaciones con mayor soltura. Veamos algunas.

• *Producto de potencias de igual base*. Al multiplicar, por ejemplo, $2^5 \times 2^3$ se obtiene: $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$. Análogamente, se comprueba que $5^2 \times 5^4 = 5^6$. Y así con cualquier otro ejemplo. No es, pues, difícil generalizar la propiedad: *El producto de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias que se multiplican*. Simbólicamente (a, n y m son números naturales):

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Así, por ejemplo: $13^3 \times 13^2 = 13^{2+3} = 13^5$; $13^4 \times 13 = 13^{4+1} = 13^5$; $13 \times 13 = 13^{1+1} = 13^2$. Pero también: $13^6 = 13 \times 13^5 = 13^2 \times 13^4 = 13^3 \times 13^3$. Es decir, hay que saber manejar la propiedad en ambos sentidos.

• *Cociente de potencias de igual base*. Al dividir, por ejemplo, $2^5 : 2^3$ se obtiene: $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) : (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 = 2^2$. Análogamente, se comprueba que $7^6 : 7^2 = 7^4$. Y así con cualquier otro ejemplo. No es tampoco difícil generalizar la propiedad: *El cociente de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes de las potencias que se dividen*. Simbólicamente (a, n y m son números naturales, con $a \neq 0$, $n > m$ inicialmente):

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Así, por ejemplo: $13^3 : 13^2 = 13^{3-2} = 13$; $13^4 : 13 = 13^{4-1} = 13^3$. Pero también: $13^2 = 13^7 : 13^5 = 13^4 : 13^2 = 13^3 \times 13$, etc. Nuevamente, hay que saber manejar la propiedad en ambos sentidos.

Ahora queda justificada la identidad apuntada anteriormente: $a^1 = a$. En efecto, si se toma un ejemplo similar a los anteriores, $5^3 : 5^2$ representa la división $125 : 25$, cuyo cociente es 5. Pero si se maneja la misma división en términos de potencias, ya hemos visto que $5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5^1$. De donde, por igualdad de resultados, tiene sentido la identificación $5^1 = 5$.

¿Qué pasa si $n = m$? Tal sería el caso de, por ejemplo, $3^4 : 3^4$. De hecho, estamos dividiendo $81 : 81$, cuyo cociente es 1. Pero si aplicamos el criterio anterior, $3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0$. Como ambos resultados deben coincidir, tenemos: $3^0 = 1$. Es fácil visualizar que este resultado puede generalizarse para cualquier caso: $a^0 = 1$, siempre con la base $a \neq 0$.

Estos dos últimos resultados, $a^1 = a$ y $a^0 = 1$, nos ayudan a superar la falsa creencia de que toda potencia de un número natural debe ser mayor que dicho número.

• *Potencia de una potencia*. Podemos tener el caso de una potencia cuya base sea, a su vez, una potencia. Por ejemplo, $(3^5)^2$. Esta operación remite a $3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{2 \times 5} = 3^{10}$. Análogamente podemos verificar que $(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$\times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3\times4} = 2^{12}$. Y así con cualquier otro ejemplo. Lo que nos permite generalizar la propiedad: *La potencia de una potencia es otra potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es el producto de los dos exponentes*. Simbólicamente (**a**, **n** y **m** son números naturales):

$$(a^n)^m = a^{n\times m}$$

Así, por ejemplo, $(5^2)^4 = 5^{2\times4} = 5^8$; $(6^3)^0 = 6^{3\times0} = 6^0 = 1$; $(11^3)^2 = 11^{3\times2} = 11^6$; $32^2 = (2^5)^2 = 2^{5\times2} = 2^{10}$. Pero también, $7^4 = (7^2)^2$; $3^6 = (3^2)^3 = (3^3)^2$; $2^8 = (2^2)^4 = (2^4)^2 = 16^2$. De nuevo, hay que saber manejar la propiedad en ambos sentidos.

• *Potencia de una multiplicación de potencias*. Por ejemplo, podemos tener la siguiente situación: $(2^3 \times 5^2)^4$. Esta operación remite a $(2^3 \times 5^2) \times (2^3 \times 5^2) \times (2^3 \times 5^2) \times (2^3 \times 5^2)$, que en razón de la conmutatividad y asociatividad del producto nos lleva a $(2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3) \times (5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2) = (2^3)^4 \times (5^2)^4 = 2^{3\times4} \times 5^{2\times4} = 2^{12} \times 5^8$. Y de un modo análogo en cualquier otro caso. Llegamos así a la generalización de la propiedad: *La potencia de una multiplicación de potencias es otra multiplicación de potencias, cada una de las cuales tiene la misma base inicial y como exponente, el respectivo producto de exponentes*. Simbólicamente (**a**, **b**, **n** y **m** son números naturales):

$$(a^n \times b^m)^p = a^{n\times p} \times b^{m\times p}$$

Por ejemplo, $(4^2 \times 5^3)^2 = 4^{2\times2} \times 5^{3\times2} = 4^4 \times 5^6$; $(3 \times 2^2 \times 5^6)^4 = 3^4 \times 2^8 \times 5^{24}$. Pero también, $2^6 \times 3^9 \times 5^{15} = (2^2 \times 3^3 \times 5^5)^3$; $7^4 \times 3^8 \times 16 = 7^4 \times 3^8 \times 2^4 = (7 \times 3^2 \times 2)^4$. Es decir, hay que saber manejar la propiedad en ambos sentidos. Obsérvese que en estos dos últimos ejemplos se trata de sacar el factor común presente en el grupo de exponentes. Así, para los exponentes **6**, **9** y **15** el factor común es **3**; y para **4**, **8** y **4** el factor común es **4**. Recuérdese que esta operación de "sacar el factor común" es una de las lecturas posibles de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta, tal como se planteó en el Cuaderno anterior.

He aquí resumidas las propiedades de las operaciones con potencias revisadas aquí:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$
$$a^n : a^m = a^{n-m} \; [a \neq 0, n \geq m]$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1 \; [a \neq 0]$$
$$(a^n)^m = a^{n\times m}$$
$$(a^n \times b^m)^p = a^{n\times p} \times b^{m\times p}$$

Como puede apreciarse, en principio se trata de formas equivalentes de escribir una misma expresión (diversidad en la representación numérica…), pero indudablemente aportan también ciertas facilidades a la hora de efectuar los cálculos solicitados, sobre todo a nivel mental. Por otro lado, la forma generalizada en que se presentan (uso de letras que representan números naturales) empieza a tender un puente hacia el álgebra, entendida como aritmética generalizada, como se verá en su momento.

Volvamos ahora a un detalle que puede ampliar el campo de aplicación de estas propiedades. En el último ejemplo aparecía el factor **16** (en $7^4 \times 3^8 \times 16$), que no se presenta en forma de potencia, pero que sí lo es (2^4). Esta transformación de la representación numérica permite manejar con mayor soltura las operaciones que se soliciten; pero es una transformación que sólo es posible si se pone en juego la capacidad de observación y, en particular, la de reconocer potencias en los números dados. En este sentido, conviene familiarizarse con algunas series de potencias, como las correspondientes a **2** (**2**, **4**, **8**, **16**, **32**, **64**, **128**, **256**, **512**, **1.024**, …) y a **3** (**3**, **9**, **27**, **81**, **243**, **729**, …). Y para ver de qué somos capaces, intentemos resolver por nuestra cuenta los siguientes ejercicios antes de ver las soluciones que después se proponen:

Exprese como potencias o como operaciones con potencias las siguientes expresiones:

a) 8×32 **b)** 8^2 **c)** 27×9
d) $36 \times 3 \times 4$ **e)** 32×10 **f)** 1.000
g) 1.600 **h)** $6^2 + 8^2$

Veamos algunas soluciones:

a) $8 \times 32 = 2^3 \times 2^5 = 2^8$; también puede efectuarse la multiplicación y luego reducirse a potencia: $8 \times 32 = 256 = 2^8$.
b) $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$; también puede efectuarse la primera potencia y luego reducirse a la potencia definitiva: $8^2 = 64 = 2^6$.
c) $27 \times 9 = 3^3 \times 3^2 = 3^5$; o también: $27 \times 9 = 243 = 3^5$.
d) $36 \times 3 \times 4 = 6^2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3)^2 \times 3 \times 2^2 = 2^2 \times 3^2 \times 3 \times 2^2 = (2^2 \times 2^2) \times (3^2 \times 3) = 2^4 \times 3^3$.
e) $32 \times 10 = 2^5 \times 2 \times 5 = 2^6 \times 5$.
f) $1.000 = 10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$.
g) $1.600 = 16 \times 100 = 2^4 \times 10^2 = 2^4 \times (2 \times 5)^2 = 2^4 \times 2^2 \times 5^2 = 2^6 \times 5^2$.
h) $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2 = (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$.

También podemos resolver alguno de los ejercicios propuestos al comienzo del Cuaderno:

¿Qué potencia de base 3 es igual a la tercera parte de $3^{2.004}$?
Obtener la tercera parte de $3^{2.004}$ equivale a dividir tal potencia entre **3**. La respuesta solicitada es, pues: $3^{2.004} : 3 = 3^{2.004-1} = 3^{2.003}$.

¿Cuál es el número natural cuyo cubo puede expresarse de la forma $2^9 \times 3^6$?
Lo que se nos pide es que hallemos el número cuyo cubo es $2^9 \times 3^6$. Ahora bien, $2^9 \times 3^6$ es igual a $(2^3 \times 3^2)^3$, de donde se sigue que el número solicitado es $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$.

A modo de resumen de estos últimos párrafos podemos reiterar que el uso de las propiedades indicadas nos permite conseguir representaciones alternativas de los números y de las operaciones entre números, situación que potencia el cálculo mental. Posteriormente veremos la utilidad adicional de todo lo expuesto al entrar en el tema de la divisibilidad entre números enteros.

6. La potenciación en el sistema de numeración decimal

En Cuadernos anteriores hemos hablado de la "democracia" existente dentro del sistema de numeración decimal, en el sentido de que cualquier cantidad puede expresarse en términos de cualquiera de las unidades del mismo. Así, el número **16.000** puede expresarse como **16** unidades de mil; **1,6** decenas de mil; **0,016** millones; **1.600** decenas; **160** centenas; **1.600.000** centésimas; etc. Esta puntualización no pierde nunca su validez.

Pero con frecuencia y en razón de las aplicaciones de la aritmética a la vida diaria y a otras disciplinas (física, química, economía, etc.), resulta muy útil tomar las "unidades" como unidad de referencia habitual, mientras no se diga lo contrario. En este caso particular resulta de interés el uso de la notación potencial para referir las diversas unidades del sistema de numeración decimal a "unidades". Así, tenemos el siguiente cuadro de equivalencias (lógicamente incompleto):

Unidades del SND	Expresión potencial en "unidades"
1 millón	$1.000.000 = 10^6$
1 centena de mil	$100.000 = 10^5$
1 decena de mil	$10.000 = 10^4$
1 unidad de mil	$1.000 = 10^3$
1 centena	$100 = 10^2$
1 decena	$10 = 10^1$
1 unidad	$1 = 10^0$

[Omitimos de momento las expresiones potenciales correspondientes a las unidades de los decimales –décimas, centésimas, etc.–, no porque no existan tales expresiones, sino porque ellas requieren el uso de números negativos, situación que nos obligaría a salir del conjunto de los números naturales para acceder al de los enteros. Este estudio se hará posteriormente, con lo que se alcanzará una visión integral del tema].

Este cuadro de expresiones alternativas nos permite ampliar el modo de representación de las cantidades. Así, volviendo al ejemplo anterior, **16.000** puede expresarse (siempre en "unidades") como:

16 unidades de mil = $\mathbf{16 \times 10^3}$
1,6 decenas de mil = $\mathbf{1{,}6 \times 10^4}$
0,016 millones = $\mathbf{0{,}016 \times 10^6}$
1.600 decenas = $\mathbf{1.600 \times 10}$
160 centenas = $\mathbf{160 \times 10^2}$
etc.

La selección de la forma más adecuada se hará en función de la situación particular en estudio. Con la introducción de estas formas de expresión se da paso a las llamadas "notaciones científicas", tan comunes en física, por ejemplo, y que aparecen ya en numerosas calculadoras. Pero también hay que ejercitar las destrezas en sentido contrario, es decir, en saber pasar

de la notación potencial a la cantidad "completa". Por ejemplo:

$\mathbf{2{,}48 \times 10^2 = 2{,}48}$ centenas
= **248** unidades
$\mathbf{0{,}75 \times 10^6}$ = **0,75** millones
= **750.000** unidades
$\mathbf{13{,}2 \times 10^3}$ = **13,2** unidades de mil
= **13.200** unidades
$\mathbf{0{,}048 \times 10^5}$ = **0,048** centenas de mil
= **4.800** unidades
$\mathbf{326 \times 10^4}$ = **326** decenas de mil
= **3.260.000** unidades
$\mathbf{0{,}0305 \times 10^3}$ = **0,0305** unidades de mil
= **30,5** unidades

Estas nuevas posibilidades de representación de los números pueden ser útiles también a la hora de efectuar operaciones de multiplicación. Recuérdese que en el Cuaderno anterior incluíamos esta tabla, destinada a dotar de interpretación a cada producto indicado:

Multiplicación	Interpretación	Resultado	Producto
10 x 100	10 centenas	1 unidad de mil	10 x 100 = 1.000
100 x 100	100 centenas	1 decena de mil	100 x 100 = 10.000
1.000 x 100	1.000 centenas	1 centena de mil	1.000 x 100 = 100.000
10 x 1	10 unidades	1 decena	10 x 1 = 10
10 x 10	10 decenas	1 centena	10 x 10 = 100
10.000 x 10	10.000 decenas	1 centena de mil	10.000 x 10 = 100.000

Ahora podemos ofrecer otra interpretación adicional (no sustitutiva) en términos de potencias:

Multiplicación	Producto
10 x 100	$10 \times 100 = 10 \times 10^2 = 10^3$
100 x 100	$100 \times 100 = 10^2 \times 10^2 = 10^4$
1.000 x 100	$1.000 \times 100 = 10^3 \times 10^2 = 10^5$
10 x 1	$10 \times 1 = 10^1 \times 10^0 = 10^1$
10 x 10	$10 \times 10 = 10^1 \times 10^1 = 10^2$
10.000 x 10	$10.000 \times 10 = 10^4 \times 10^1 = 10^5$

Todo esto puede verse como una forma de facilitar ciertos cálculos mentales. Por ejemplo, si se desea multiplicar **1.500 x 26.000**, la operación puede verse como: $\mathbf{1.500 \times 26.000 = (15 \times 10^2) \times (26 \times 10^3) = (15 \times 26) \times (10^2 \times 10^3) = [(10 + 5) \times 26] \times 10^5 = (260 + 130) \times 10^5 = 390 \times 10^5 = 39 \times 10 \times 10^5 = 39 \times 10^6}$ = **39 millones** (todo este cálculo puede efectuarse mentalmente). Obsérvese que el "separar" inicialmente las potencias de 10 presentes reduce el campo de números a multiplicar, y que el "reintegro" posterior de la potencia final permite ubicar el resultado en las unidades correspondientes.

Resuelva las siguientes multiplicaciones ayudándose de la representación potencial de los números:

a) *120 x 700*	***b)*** *9.000 x 1.400*
c) *70 x 320*	***d)*** *65 x 300*
e) *40.000 x 150*	***f)*** *160 x 8.000*

7. La resolución de problemas de potenciación

En lo que llevamos escrito ya ha podido observarse el carácter de los problemas o ejercicios que pueden tener relación con la potenciación. En general suelen referirse a regularidades o características que presentan algunos números y series de números, y a la posibilidad de utilizar las propiedades y facilidades que aportan las ideas consideradas. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que volvemos a sugerir a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

a) *¿Cuál es la cifra de las unidades del desarrollo de la siguiente expresión:* $7 \times 5^{199} + 3$*?*

b) La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es **49**. ¿Cuánto suman estos dos números?

c) *Existe un número de dos cifras tal que, si se le agrega una unidad se consigue un cuadrado perfecto, y si se le agrega una unidad a su mitad, también se consigue un cuadrado perfecto. ¿De qué número se trata?*

d) ¿Cuántos ceros hay al final del número $(10^2 + 10^3 + \ldots + 10^8)^{2.004}$?

e) *¿Cuáles son los dos números naturales menores (excluidos el 0 y el 1) cuya diferencia de cuadrados sea un cubo? ¿Y aquéllos cuya diferencia de cubos sea un cuadrado?*

f) Si n representa a un número natural cualquiera, ¿cuál de los siguientes números es necesariamente impar: $5 \times n$; $n^2 + 5$; n^3; $2 \times n^2 + 1$?

g) *La edad de Lucía es un número de dos cifras que acaba en **3**. Además, el cuadrado de su primer dígito es igual a su edad escrita con los dígitos cambiados de lugar. ¿Cuántos años tiene Lucía?*

h) Tome una calculadora de las corrientes. Halle 33^2, 333^2, 3.333^2 y observe bien los resultados obtenidos. Determine ahora el valor de $3.333.333^2$ (evidentemente, el resultado "no cabe" en la pantalla de la calculadora…).

i) *Estime si* 2^{30} *es mayor que **un millardo (mil millones)**. No necesita calcular el valor de la potencia…*

j) Observe bien el siguiente "arreglo" de los números a partir de **1**:

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 18 ....

¿Qué número ocupa el tercer lugar, de izquierda a derecha, en la fila **82**? ¿Dónde estará ubicado el número **74.126**?

k) *Ordene, de menor a mayor, las siguientes potencias:* 2^{55}, 3^{33}, 5^{22}.

Vamos, como siempre, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) Necesitamos saber la última cifra de la potencia $\mathbf{5^{199}}$. Como la base es **5**, todas sus potencias acaban en **5**. Al multiplicarse por **7**, la última cifra del producto sigue terminando en **5**. Y al agregársele **3**, la última cifra de $\mathbf{7 \times 5^{199} + 3}$ es **8**.

b) Si la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es **49** y como **49 = 24 + 25**, tal diferencia se obtiene en la resta $\mathbf{25^2 - 24^2}$. Por consiguiente, la suma de ambos números es también **49**.

c) Se trata de ensayar con números de dos cifras para conseguir aquel que cumpla ambas condiciones. La primera nos restringe la búsqueda hacia aquellos números que sean iguales a un cuadrado menos **1** unidad: {**15, 24, 35, 48, 63, 80, 99**}. De este conjunto debemos excluir los impares, que no poseen una mitad entera, con lo que nos quedan: {**24, 48, 80**}. Si a las mitades de estos números les añadimos **1** unidad obtenemos: {**13, 25, 41**}. De estas tres opciones, sólo **25** es un cuadrado perfecto. Por consiguiente, el número solicitado es **48**.

d) Analicemos primero la base: $\mathbf{10^2 + 10^3 + \ldots + 10^8}$. Se trata de la suma de potencias de **10**, desde **100** hasta **100 millones**. Esta suma nos da el número **111.111.100.** Ahora bien, $\mathbf{(10^2 + 10^3 + \ldots + 10^8)^{2.004} = 111.111.100^{2.004} = (1.111.111 \times 100)^{2.004} = (1.111.111 \times 10^2)^{2.004} = 1.111.111^{2.004} \times (10^2)^{2.004} = 1.111.111^{2.004} \times 10^{4.008}}$. De donde se sigue que la expresión dada termina en **4.008** ceros.

e) Vamos con la primera pregunta. Procedemos por la vía del ensayo y ajuste teniendo a la vista los cubos de los números a partir de **2** (**8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1.000**, …), restando cuadrados de esos mismos números (**4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100**, …) y observando si su diferencia es un cubo. Ninguna diferencia de cuadrados da **8** (pudiera haber sido **9 – 1**, pero el **1** quedó excluido). Al tomar **27** como diferencia encontramos los cuadrados **36** y **9** (**36 – 9 = 27**). Los números pedidos son, pues, **6** y **3**. Posteriormente encontraríamos que también $\mathbf{14^2 - 13^2 = 14 + 13 = 27}$, pero **6** y **3** son menores que **14** y **13**.

En cuanto a la segunda pregunta, se procede de un modo análogo, para llegar finalmente a $\mathbf{8^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169 = 13^2}$. Ahora los números pedidos son **8** y **7**.

f) Examinemos cada uno de los casos:

- $\mathbf{5 \times n}$: Si **n** es par, este producto es par.
- $\mathbf{n^2 + 5}$: Si **n** es impar, también lo es $\mathbf{n^2}$; por lo tanto $\mathbf{n^2 + 5}$ será par.
- $\mathbf{n^3}$: Si **n** es par, su cubo también lo será.
- $\mathbf{2 \times n^2 + 1}$: $\mathbf{n^2}$ puede ser par o impar, según lo sea **n**; pero $\mathbf{2 \times n^2}$ siempre será par. Y por lo tanto, $\mathbf{2 \times n^2 + 1}$ será siempre impar. Por consiguiente, sólo esta última expresión es necesariamente impar, siempre.

g) Podemos ensayar con todos los números de dos cifras terminados en **3**, siempre que el cuadrado del primer dígito tenga también dos cifras (**43, 53, 63**, etc.), pero no es necesario. El enunciado nos dice que este **3** es el comienzo de un cuadrado perfecto, y esto sólo ocurre en el caso de **36**, es decir, de $\mathbf{6^2}$. Por consiguiente, la edad de Lucía es de **63** años.

h) La calculadora reporta: $\mathbf{33^2 = 1.089}$; $\mathbf{333^2 = 110.889}$; $\mathbf{3.333^2 = 11.108.889}$; al pretender calcular $\mathbf{33.333^2}$, nos aparece un mensaje de error: el resultado no cabe ya en la pantalla. Pero con los tres casos anteriores es suficiente para detectar la regularidad presente. Los números llevan una secuencia de las siguientes cifras: **1, 0, 8** y **9**. El **0** y el **9** se repiten siempre sólo una vez, mientras que el **1** y el **8** se repiten tantas veces como cifras "**tres**" aparecen en la base de la potencia, menos **1**. Por consiguiente, $\mathbf{3.333.333^2 = 11.111.108.888.889}$.

i) Efectivamente, no hace falta calcular el valor de $\mathbf{2^{30}}$. Estamos comparando esta potencia con **1 millardo**, que es $\mathbf{10^9}$. Como $\mathbf{2^{30} = (2^{10})^3}$ y $\mathbf{10^9 = (10^3)^3}$, la comparación puede reducirse a las bases, a si $\mathbf{2^{10}}$ es mayor o no que $\mathbf{10^3}$, es decir, que **1.000**. Si repasamos las sucesivas potencias de **2** encontramos que $2^{10} = 1.024 > 1.000$. Por consiguiente, 2^{30} es mayor que **1 millardo**.

j) El problema nos debe llevar a observar cuidadosamente el "arreglo" o pirámide de los números. Puede haber varias regularidades observables, de las cuales nos interesará la que nos permita responder las preguntas propuestas. Por ejemplo, podemos detectar que la cantidad de elementos presentes en cada fila forman la secuencia de los números impares (**1**, **3**, **5**, **7**, etc.); o que los elementos de la columna central aumentan, sucesivamente, en **2**, en **4**, en **6**, etc.

Pero si ya tenemos cierta familiaridad con los cuadrados, habremos observado que el número final de cada fila es un cuadrado:

la 1ª fila termina en **1** (1^2)
la 2ª fila termina en **4** (2^2)
la 3ª fila termina en **9** (3^2)
la 4ª fila termina en **16** (4^2)
etc.

Esta regularidad es fácil de generalizar: la 81ª fila termina en **6.561** (81^2). Por consiguiente, el número que ocupa el tercer lugar, de izquierda a derecha, en la fila 82 es el número **6.564**.

La vía que acabamos de seguir nos sirve de orientación para responder la segunda pregunta. Para ubicar el número **74.126** tenemos que encontrar el cuadrado perfecto inmediatamente anterior a ese número. Para ello podemos utilizar la calculadora, introducir el número y pulsar la tecla de $\sqrt{}$ (raíz cuadrada). Esta acción nos reporta el número **272,2609**, lo que nos indica que el cuadrado inmediatamente anterior es $272^2 = 73.984$. Nuestro número se halla en la fila **273**. Para ubicarlo exactamente, restamos **74.216 – 73.984 =** (yendo del sustraendo al minuendo) **16 + 216 = 232**: ocupa el lugar **232** en esa fila.

k) No se trata de desarrollar cada una de las potencias y luego ordenarlas, aunque ésta es una de las formas de resolver el ejercicio. Más bien, vamos a fijarnos en las potencias. Para poder comparar dos de ellas sin calcular su valor, tenemos dos criterios: si tienen la misma base, la menor será la que tenga el menor exponente; y si tienen el mismo exponente, la que tenga menor base.

En nuestro caso, no tienen las mismas bases. Tampoco los exponentes son iguales, pero hay "algo" en ellos: **55**, **33**, **22**. En ese "algo" puede estar la solución. En efecto, **55**, **33** y **22** poseen un "factor común": **11** ($55 = 5 \times 11$; $33 = 3 \times 11$; $22 = 2 \times 11$). De modo que las potencias pueden escribirse así: $(2^5)^{11}$, $(3^3)^{11}$ y $(5^2)^{11}$, ó lo que es lo mismo: 32^{11}, 27^{11} y 25^{11}. Ahora el orden es evidente: $25^{11} < 27^{11} < 32^{11}$. Es decir, $5^{22} < 3^{33} < 2^{55}$

No podemos terminar esta parte dedicada a los problemas de potenciación sin reiterar la reflexión que, sobre la forma en que los hemos abordado y resuelto, hicimos en los tres Cuadernos anteriores. He aquí algunas conclusiones, que seguramente compartimos todos:

1. El método de *tanteo razonado* (ensayo y ajuste) sigue mostrándose como eficiente. Como decíamos, es un método científico excelente, que nos acostumbra a formular hipótesis razonables –ajustadas a las condiciones de la situación– y a verificarlas en la práctica. Todo esto refleja un proceso permanente de toma de decisiones, así como de control sobre la propia actividad.

2. Nunca insistiremos demasiado acerca del valor de la *observación*: observar el enunciado de la situación, las condiciones que afectan a las variables o a los datos numéricos, los casos posibles, las hipótesis que formulamos, los resultados parciales que vamos obteniendo…

Por otro lado, resulta imprescindible la consideración de los resultados presentes en las *tablas de potencias* y en las *propiedades y regularidades* formuladas, así como la utilidad de su memorización progresiva.

8. La potenciación en el aula

Habitualmente, este es un tema que apenas se trabaja en el aula pero que, como se ha visto, presenta muchos puntos de interés. ¿Qué hacer en el aula? Desde luego, no limitarse a calcular potencias. Hay que habituarse a ellas, a reconocerlas "escondidas" en los números. Lo que se trata es de ver los números de otra forma; es decir, de acostumbrarse a las diversas formas en que podemos representarlos. Y esta tiene que ser una tarea permanente en el aula, no circunscrita a un solo grado de la escuela.

En cuanto a las propiedades de las potencias, debe llegarse a ellas por la vía de la observación y del descubrimiento. Por otro lado, el enunciado de tales propiedades se presta a un verdadero afinamiento en el uso del lenguaje matemático.

En definitiva se trata de convertir los números en un verdadero tema de estudio: sus distintas formas de representación, las propiedades inherentes a cada una de esas formas, las facilidades que se derivan para operar con los números… Todo esto se integra en lo que se denomina "desarrollo del sentido numérico", tema al que volveremos en los dos Cuadernos siguientes (División y Divisibilidad).

El motor de todo este esfuerzo es la observación, la visualización de regularidades, que da paso a una generalización basada sobre la evidencia que aporta tal visualización. En este nivel no se trata de desarrollar demostraciones rigurosas; éstas vendrán posteriormente, en el terreno de la llamada Teoría de Números o Análisis Numérico, con las herramientas que facilita el lenguaje algebraico.

Precisamente, este tema de la potenciación sirve también de apertura a ese lenguaje algebraico, ya que nos hemos visto en la necesidad de utilizar letras cuando hemos querido referirnos a regularidades y propiedades válidas para cualquier número natural. Este paso al lenguaje algebraico nos está mostrando que el Álgebra puede considerarse, inicialmente, como una Aritmética generalizada.

Pero la necesidad de demostraciones rigurosas en matemática no supone ningún obstáculo para el ejercicio de la visualización y de la generalización que ella aporta. Más bien hay que insistir en la adquisición de tal hábito, que no se debe perder al llegar al terreno –en su momento– de las demostraciones formales. Esta es la esencia de la historia de la matemática (y también de su aprendizaje): la intuición como motor para la búsqueda, y la formalización posterior como vía para consolidar el edificio matemático y para validar sus resultados.

9. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"…

Resuelva mentalmente los siguientes ejercicios. Verifique posteriormente la exactitud de sus respuestas utilizando la calculadora:

- Si **375^2 = 140.625**, obtenga los valores de **376^2** y de **374^2**
- Obtenga los cuadrados de: **103**; **88**; **92**; **750**; **697**; **1.800**; **1.100**; **592**
- Efectúe las siguientes multiplicaciones: **98 x 102**; **73 x 67**; **1.800 x 2.200**
- Obtenga las siguientes diferencias: **$76^2 – 24^2$**; **$105^2 – 55^2$**; **$6.984^2 – 6.983^2$**

1. *¿Cuál es la última cifra del desarrollo de la potencia **7^{83758}**?*

2. Tenemos un número impar representado por **n**. Sabemos que la cifra de las unidades de la cuarta potencia de **n** no es **1**. ¿Cuál es la cifra de las unidades de **n**?

3. *¿Cuál es el número siguiente en la secuencia: **1**, **9**, **36**, **100**, …?*

4. ¿Qué potencia de **10** equivale a diez millones?

5. *La diferencia de los cuadrados de dos números naturales no consecutivos es **93**. ¿Cuáles son los números?*

6. ¿Cuál es el dígito de las decenas de $\mathbf{11^{11}}$?

__7.__ ¿Cuántas cifras diferentes se necesitan para escribir el desarrollo de $\mathbf{10^{499}}$? ¿Cuántas cifras tendrá ese número?

8. Srinivasa Ramanujan fue un joven matemático hindú (murió de tuberculosis a los 33 años, en 1920), dotado de una gran intuición y de una gran capacidad de cálculo mental. Se cuenta de él (Alsina, Guzmán, 1998, p. 74) que, estando enfermo, fue visitado por otro gran matemático inglés, Hardy, quien le manifestó que había llegado al hospital en un taxi cuya placa era 1.729, "un número más bien insípido que esperaba no le fuera de mal agüero". A lo que Ramanujan respondió: "No. Es un número muy interesante. Es el número más pequeño que se puede expresar como suma de dos cubos, de dos maneras diferentes". Disfrácese de hindú y responda: ¿Cuáles son esas dos parejas de números tales que la suma de sus cubos es **1.729**?

__9.__ Las letras __a__ y __b__ representan dos números naturales consecutivos. Deseamos saber si la expresión $\mathbf{a^2 + b^2 + a + b}$ será siempre par o impar.

10. Exprese los números **115** y **134** como suma de cuatro cuadrados, repetidos o no e incluido el **0**, de todas las maneras que pueda.

__11.__ ¿Cuáles son los números naturales cuyos cuadrados están comprendidos entre __200__ y __500__? ¿Y cuáles son aquéllos cuyos cubos están comprendidos entre __500__ y __2.000__?

12. ¿Cuál es la primera potencia de **2** cuyo valor es superior a **100.000**?

__13.__ Dada la suma: $\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 18^3 + 19^3}$, determine si ésta es par o no. Obtenga después el valor de dicha suma [Trate de utilizar una de las regularidades halladas].

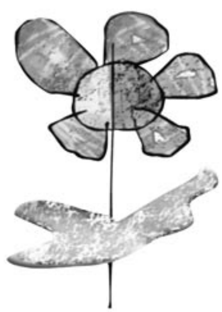
14. Escriba las siguientes expresiones como potencias de los números **2**, **3** ó **5**, o como operaciones con potencias de esos tres números: $\mathbf{9^3}$; $\mathbf{3^2 \times 16}$; **100 x 24**; $\mathbf{9^2 + 12^2}$; **7.200**

__15.__ Halle tres números de tres cifras cada uno (obtenidos al elevar al cuadrado sendos números de dos cifras), tales que al juntar sus cifras, aparecen todos los dígitos del __1__ al __9__.

Si tiene la oportunidad, lea el Capítulo XVI (Leyenda sobre el origen del juego de ajedrez), del libro "El hombre que calculaba", escrito por Malba Tahan (Tahan, s.f.). Allí podrá apreciar algunas singularidades de la secuencia de potencias de **2**… y algunos sabios consejos acerca de la prudencia a la hora de hacer promesas…

Referencias bibliográficas

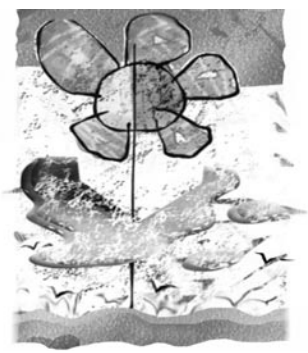
- Alsina, C., De Guzmán, M. (1998). *Los matemáticos no son gente seria*. Barcelona: Rubes.
- Gentile, E. (1985). *Aritmética elemental*. Washington: OEA.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Vol. I*. Madrid: Alianza.
- Tahan, M. (s.f.). *El hombre que calculaba*. Autor.



Respuestas de los ejercicios propuestos

1. 9
2. 5
3. $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 225$
4. 10^7
5. 17 y 14
6. 1
7. Dos cifras: 0 y 1 / Tiene 500 cifras
8. 10 y 9; 12 y 1
9. Par
10. $115 = 81 + 25 + 9 + 0 = 81 + 16 + 9 + 9 = 64 + 25 + 25 + 1 = 49 + 49 + 16 + 1 = 49 + 25 + 25 + 16$; $134 = 121 + 9 + 4 + 0 = 100 + 25 + 9 + 0 = 100 + 16 + 9 + 9 = 81 + 49 + 4 + 0 = 81 + 36 + 16 + 1 = 64 + 36 + 25 + 9 = 49 + 49 + 36 + 0$
11. Los números del 15 al 22 / Los números del 8 al 12
12. 2^{17}
13. Par / $(1 + 2 + \ldots + 18 + 19)^2 = 190^2 = 36.100$
14. 3^6; $3^2 \times 2^4$; $2^5 \times 5^2 \times 3$; $3^2 \times 5^2$; $2^5 \times 3^2 \times 5^2$
15. 361 (19^2), 529 (23^2) y 784 (28^2).

Índice



Este libro se terminó de imprimir
en el mes de septiembre de 2005.